فصل ۳

مروری بر ماتریس‌های حسگر

۳–۱ مقدمه

دو قسمت اصلی در مبحث نمونه‌برداری فشرده عبارتند از عمل نمونه‌برداری و عمل بازسازی. در فصل گذشته به طور مختصر به روش‌های بازسازی اشاره شد. از آن‌جا که نوآوری اصلی این پایان‌نامه در روش‌های نمونه‌برداری است، مرور جامع‌تری در این قسمت ارائه می‌شود. همان طور که در فصل ۱ ذکر شد، عمل نمونه‌برداری در مبحث نمونه‌برداری فشرده به صورت خطی و توسط ماتریس حسگر صورت می‌گیرد. برای بررسی توانایی‌ها و محدودیت‌های ساختاری در این مبحث، به طور تاریخی ابتدا ماتریس‌های تصادفی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به دلیل وجود تقارن در بسیاری از ساختارهای تصادفی، بررسی این ماتریس‌ها ساده‌تر از ماتریس‌های یقینی صورت می‌گیرد. از طرف دیگر، همانند مبحث کدگذاری، برای رسیدن به ظرفیت شبکه، نتایج بدست آمده از ماتریس تصادفی تا کنون قوی‌تر از ماتریس‌های یقینی بوده است. به بیان ساده‌تر، به کمک نتایج حاصل از ماتریس‌های تصادفی، وجود ماتریس‌هایی با پارامترهای مطلوب به اثبات رسیده است در حالی که هنوز پیاده‌سازی برای این گونه ماتریس‌ها یافت نشده است. در این فصل، در دو بخش جداگانه، به بررسی ماتریس‌های تصادفی و یقینی می‌پردازیم. قابل ذکر است که نوآوری اصلی نگارنده در این پایان‌نامه که در فصل ۴ بیان خواهد شد، ارائه ماتریس‌های یقینی است.

۳–۲ ماتریس‌های حسگر تصادفی

برای توضیح در مورد ماتریس‌های تصادفی، از حالت ساده گوسی شروع می‌کنیم. فرض کنید $\mathbf{A}_{m\times n}$ ماتریسی تصادفی با درایه‌های گوسی مستقل از هم‌باشد به نحوی که میانگین هر درایه صفر و واریانس (σ^2)آن $\frac{1}{m}$ باشد. همچنین فرض کنید $\mathbf{x}_{n\times 1}$ یک بردار یقینی دلخواه باشد و تعریف کنید $\mathbf{y}_{m\times 1} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}$. در این صورت داریم:

$$1 \le i \le m: \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \tag{۳–۱}$$

از آن‌جا که y_iها ازترکیب خطی متغیرهای گوسی مستقل حاصل شده‌اند، خود گوسی هستند و

$$\begin{cases} \mu_y &= \mathscr{E}\{y_i\} = \sum_{j=1}^{n} \mathscr{E}\{a_{ij}\}x_j = 0 \\ \sigma_y^2 &= \mathscr{E}\{y_i^2\} = \sum_{j_1,j_2=1}^{n} \mathscr{E}\{a_{ij_1}a_{ij_2}\}x_{j_1}x_{j_2} = \frac{\|\mathbf{x}_{n\times 1}\|_{\ell_2}^2}{m} \end{cases} \tag{۳–۲}$$

همچنین y_iها از یکدیگر مستقل هستند. با توجه به میانگین و واریانس y_iها، $\frac{\sqrt{m}}{\|\mathbf{x}\|_{\ell_2}}y_i$ یک متغیر گوسی استاندارد است (واریانس واحد) و در نتیجه $l_i = \frac{my_i^2}{\|\mathbf{x}\|_{\ell_2}}$ یک متغیر Chi-Square استاندارد با درجه آزادی یک است. داریم:

$$\begin{cases} l &= \sum_{i=1}^{m} l_i = m\frac{\|\mathbf{y}\|_{\ell_2}^2}{\|\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2} \\ \mu_l &= \mathscr{E}\{l\} = \frac{m^2}{\|\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2}\sigma_y^2 = m \end{cases} \tag{۳–۳}$$

برای بررسی نامساوی‌های مربوط به شرط RIP، احتمال برقراری این نامساوی‌ها را مطالعه می‌کنیم:

$$\begin{cases} P\Big(\frac{\|\mathbf{Ax}\|_{\ell_2}^2}{\|\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2} \le 1+\delta\Big) &= P\big(l \le m(1+\delta)\big) = 1 - P\big(l > m(1+\delta)\big) \\ P\Big(\frac{\|\mathbf{Ax}\|_{\ell_2}^2}{\|\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2} \ge 1-\delta\Big) &= P\big(l \ge m(1-\delta)\big) = 1 - P\big(l < m(1-\delta)\big) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad P\Big(1-\delta \le \frac{\|\mathbf{Ax}\|_{\ell_2}^2}{\|\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2} \le 1+\delta\Big) \ge 1 - P\big(l > m(1+\delta)\big) - P\big(l < m(1-\delta)\big) \tag{۳–۴}$$

با استفاده از نامساوی چرنف[1] برای هر $\nu > 0$ داریم:

$$\begin{aligned} P\big(l > m(1+\delta)\big) &< \mathscr{E}_l\Big\{e^{\nu(l-m(1+\delta))}\Big\} = \mathscr{E}_{\{l_i\}_i}\Big\{e^{\nu\sum_{i=1}^{m} l_i-(1+\delta)}\Big\} \\ &= \Big(\mathscr{E}_{l_1}\Big\{e^{\nu(l-(1+\delta))}\Big\}\Big)^m = e^{-\nu m(1+\delta)}\Big(\mathscr{E}_{l_1}e^{\nu l_1}\Big)^m \end{aligned} \tag{۳–۵}$$

با توجه به تابع مشخصه توزیع Chi-Square استاندارد با مرتبه واحد، برای $\nu < \frac{1}{2}$ داریم:

$$\mathscr{E}_{l_1}\Big\{e^{\nu l_1}\Big\} = (1-2\nu)^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\ln 1-2\nu} \tag{۳–۶}$$

---

[1] Chernoff

که به کمک (۳–۵) نتیجه می‌دهد:

$$P\big(l > m(1+\delta)\big) < e^{-m(\nu(!+\delta)+\frac{1}{2}\ln(1-2\nu))} \tag{۳–۷}$$

با استفاده از مشتق گیری می‌توان نشان داد که بهترین مقدار ν که در نامساوی فوق حداقل کران بالا را ایجاد می‌کند، عبارت است از $\nu = \frac{\delta}{2(1+\delta)}$. پس

$$P\big(l > m(1+\delta)\big) < e^{-\frac{m}{2}(\delta+\ln(1+\delta))} \tag{۳–۸}$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد:

$$P\big(l < m(1-\delta)\big) < e^{\frac{m}{2}(\delta+\ln(1-\delta))} \tag{۳–۹}$$

دقت کنید که :

$$\begin{cases} \delta + \ln(1+\delta) & \geq & \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{3} \\ \delta + \ln(1-\delta) & \leq & -\frac{\delta^2}{2} \end{cases} \tag{۳–۱۰}$$

بنابراین احتمال برقرار نبودن هر یک از نامساوی‌های RIP مربوط به بردار $\mathbf{x}$ به صورت نمایی نسبت به m کاهش می‌یابد. حال فرض کنید $\mathcal{Q}$ مجموعه‌ای N عضوی از بردارهای n بعدی باشد؛ با استفاده از کران اجتماع خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P\Big(\forall \mathbf{x}\in\mathcal{Q}:\ 1-\delta \leq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2_{\ell_2}}{\|\mathbf{x}\|^2_{\ell_2}} \leq 1+\delta\Big) \quad &\geq \quad 1 - N\Big(e^{-\frac{m}{2}(\frac{\delta^2}{2}-\frac{\delta^3}{3})} + e^{-\frac{m\delta^2}{4}}\Big) \\ &\geq \quad 1 - 2Ne^{-\frac{m}{2}(\frac{\delta^2}{2}-\frac{\delta^3}{3})} \end{aligned} \tag{۳–۱۱}$$

نا منفی بودن کران پایین در نامساوی فوق نشانه آن است که با احتمال ناصفر، ماتریس تصادفی $\mathbf{A}$ وجود دارد که شرط RIP را برای تمام اعضای مجموعه $\mathcal{Q}$ ارضا می‌کند. با استفاده از این روش، می‌توان برقراری نامساوی‌های RIP را به طور همزمان تنها در مورد تعداد متناهی راستا در فضای n بعدی (اگر شرط RIP برای یک بردار $\mathbf{x}_{n\times 1}$ برقرار باشد، برای تمام مضارب آن نیز برقرار است) اثبات کرد. اما تعداد راستاهای بردارهای k–تنک نامحدود است. ایده‌ی جالب توجه در این‌جا این است که می‌توان از برقراری نامساوی‌های RIP برای یک مجموعه‌ی متناهی خاص از بردارهای تنک، برقراری نامساوی برای همه بردارهای تنک را نتیجه گرفت [۱۱].

فرض کنید $\mathcal{T}$ زیرمجموعه‌ای k عضوی از $\{1,2,\dots,n\}$ باشد و $X_{\mathcal{T}}$ مجموعه تمام بردارهای n بعدی k–تنک باشد که تنها در مکان‌های متعلق به $\mathcal{T}$ عضو ناصفر دارند. ابتدا نامساوی‌های RIP را برای زیرفضای k بعدی

$X_{\mathcal{T}}$ بررسی می‌کنیم. همان طور که پیش‌تر اشاره شد، برقراری و یا عدم برقراری شرط RIP تنها به راستای بردار $\mathbf{x}_{n\times 1}$ بستگی دارد و نه اندازه آن. بنابراین اگر نامساوی‌ها را فقط برای بردارهای با نرم واحد (ابر کرده واحد) اثبات کنیم، برای تمامی‌بردارها اثبات کرده‌ایم. با توجه به قضایای مربوط به پوشش کره واحد k- بعدی، می‌دانیم که می‌توان $\lfloor(\frac{24}{\delta})^k\rfloor$ نقطه روی کره انتخاب کرد به نحوی که هر نقطه روی کره به فاصله حداکثر $\frac{\delta}{8}$ از یکی از این نقاط قرار گیرد [۶۷]. نشان می‌دهیم که اگر نامساوی‌های RIP با ثابت $\frac{\delta}{2}$ برای این نقاط متعلق به زیر فضای $X_{\mathcal{T}}$ برقرار باشند، نامساوی‌های RIP با ثابت δ برای تمام زیر فضای $X_{\mathcal{T}}$ برقرارند. فرض کنید $\mathbf{x}_{n\times 1}\in X_{\mathcal{T}}$ برداری با نرم واحد باشد که بزرگترین ثابت δ_u را در نامساوی سمت راست شرط RIP برای تمام بردارهای $X_{\mathcal{T}}$ دارد (حالت $\delta_u\geq 1$ نیز در این‌جا قابل قبول است). همچنین فرض کنید $\mathbf{q}_{n\times 1}$ نزدیک‌ترین نقطه در بین مجموعه مذکور به $\mathbf{x}_{n\times 1}$ باشد:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\delta_u}=\|\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}\|_{\ell_2} &\leq \|\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{q}_{n\times 1}\|_{\ell_2}+\|\mathbf{A}_{m\times n}(\mathbf{x}_{n\times 1}-\mathbf{q}_{n\times 1})\|_{\ell_2}\leq\sqrt{1+\frac{\delta}{2}}+\sqrt{1+\delta_u}\frac{\delta}{8}\\ &\Rightarrow\quad 1+\delta_u\leq\frac{1+\frac{\delta}{2}}{\left(1-\frac{\delta}{8}\right)^2}\quad\Rightarrow\quad\delta_u\leq\frac{\frac{3}{4}\delta-\frac{1}{64}\delta^2}{\left(1-\frac{1}{8}\right)^2}<\delta\end{aligned}\tag{۳-۱۲}$$

حال فرض کنید $\mathbf{x}_{n\times 1}\in X_{\mathcal{T}}$ یک بردار دلخواه باشد و $\mathbf{q}_{n\times 1}$ نزدیک نقطه در بین مجموعه مورد نظر به این نقطه باشد، داریم:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}\|_{\ell_2} &\geq \|\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{q}_{n\times 1}\|_{\ell_2}-\|\mathbf{A}_{m\times n}(\mathbf{x}_{n\times 1}-\mathbf{x}_{n\times 1})\|_{\ell_2}\geq\sqrt{1-\frac{\delta}{2}}-\sqrt{1+\delta}\frac{\delta}{8}\\ &\geq 1-\frac{\delta}{2}-(1+\delta)\frac{\delta}{8}\geq 1-\delta\end{aligned}\tag{۳-۱۳}$$

پس شرط RIP با ثابت δ برای تمام زیر فضای $X_{\mathcal{T}}$ برقرار است. در روند بالا، ابتدا یک زیرمجموعه k عضوی $\mathcal{T}$ از $\{1,\dots,n\}$ انتخاب کردیم و سپس برای ایجاد شرط RIP روی کل زیر فضای $X_{\mathcal{T}}$ تعداد $(\frac{24}{\delta})^k$ نقطه را برای برقراری شرط RIP با ثابت $\frac{\delta}{2}$ انتخاب کردیم. اگر بخواهیم حکم فوق را به کل زیرمجموعه‌های k عضوی از $\{1,\dots,n\}$ تعمیم دهیم، کافی است شرط RIP با ثابت $\frac{\delta}{2}$ برای مجموعه‌ای $(\frac{24}{\delta})^k\binom{n}{k}$ عضوی برقرار شود. با توجه به (۳-۱۱) احتمال برقراری شرط RIP با ثابت $\frac{\delta}{2}$ برای این مجموعه حداقل برابر است با:

$$1-2\Big(\frac{24}{\delta}\Big)^k\binom{n}{k}e^{-m(\frac{\delta^2}{16}-\frac{\delta^3}{48})}\tag{۳-۱۴}$$

با استفاده از تقریب استرلینگ و در نظر گرفتن $k\ll n$ داریم:

$$\binom{n}{k}=\mathcal{O}\bigg(\big(\frac{n}{k}\big)^k\big(\frac{n}{n-k}\big)^{n-k}\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}\ \bigg)\leq e^{\mathcal{O}(k\ln\frac{n}{k}+k)}\tag{۳-۱۵}$$

در نتیجه احتمال برقراری شرط RIP با ثابت $\frac{\delta}{2}$ روی مجموعه مفروض به طور حدی از

$$1 - 2e^{\mathcal{O}\left(k(\ln\frac{n}{k}+1+\ln\frac{24}{\delta})-m(\frac{\delta^2}{16}-\frac{\delta^3}{48})\right)} \tag{۳-۱۶}$$

کمتر نیست. پس اگر $m > \mathcal{O}(k\ln\frac{n}{k})$، توان عدد منفی و بزرگی خواهد بود و در نتیجه کران پایین روی احتمال بسیار به یک نزدیک خواهد بود. به بیان ساده‌تر اگر $m > \mathcal{O}(k\ln\frac{n}{k})$، احتمال برقراری شرط RIP مرتبه‌ی k (با هر ثابت δ) بسیار نزدیک به یک خواهد بود. این نتیجه نه تنها وجود ماتریس‌های یقینی که شرط RIP را ارضا می‌کنند نشان می‌دهد بلکه بیان می‌کند که هر تحقق از ماتریس تصادفی گوسی با احتمال نزدیک به یک این شرط را برآورده خواهد کرد.

با کمی‌دقت در روابط بدست آمده می‌توان به این نتیجه رسید که تنها استفاده‌ای که از گوسی‌بودن توزیع احتمال شده، این است که اگر $\mathbf{A}_{m\times n}$ با درایه‌های i.i.d. و توزیع گوسی اختیار شوند:

$$P\left(\left|\|\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}\|_{\ell_2}^2 - \mathscr{E}\{\|\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}\|_{\ell_2}^2\}\right| \geq \epsilon\mathscr{SD}\{\|\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}\|_{\ell_2}^2\}\right) \leq 2e^{-mf(\epsilon)} \tag{۳-۱۷}$$

که f یک تابع مثبت و کراندار و $\mathscr{SD}\{.\}$ معرف انحراف معیار است (جذر واریانس). نامساوی فوق به نامساوی تمرکز اندازه[2] شهرت دارد و تنها محدود به توزیع گوسی نیست. حالت کلی‌تری از آن چه در بالا برای توزیع گوسی ذکر شد به نام قضیه Johnson-Lindenstrauss تعمیم‌یافته به صورت زیر وجود دارد [۱، ۵۶، ۵۹]:

قضیه ۳-۱ فرض کنید $0 < \delta < 1$ یک ثابت داده شده و $\mathcal{Q}$ یک مجموعه N عضوی از $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت برای هر $m > m_0 = \mathcal{O}(\frac{\ln N}{\delta^2})$ تابع خطی $f:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ وجود دارد که برای هر $\mathbf{u}_{n\times 1}, \mathbf{v}_{n\times 1} \in \mathcal{Q}$:

$$(1-\delta)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\ell_2}^2 \leq \|f(\mathbf{u})-f(\mathbf{v})\|_{\ell_2}^2 \leq (1+\delta)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\ell_2}^2 \tag{۳-۱۸}$$

در حقیقت شرط RIP حالت خاصی از قضیه فوق است که $\mathcal{Q}$ شامل بردار تمام صفر است و ما تنها به دنبال نامساوی‌هایی هستیم که یکی از بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ همین بردار تمام صفر است.

۳-۳ ماتریس‌های حسگر غیرتصادفی

در بخش گذشته با استفاده از ماتریس‌های تصادفی نشان دادیم که اگر تعداد سطرهای ماتریس (m) بیشتر از یک کران پایین با مرتبه $k\ln\frac{n}{k}$ باشد، شرط RIP قابل دستیابی است. در این بخش به دنبال روش‌های ساخت ماتریس

[2] Measure Concentration

حسگر هستیم به نحوی که بتوان وجود شرط RIP را تضمین کرد. برای این منظور مجدداً شرط RIP را بررسی می‌کنیم.

اگر ماتریس $\mathbf{A}_{m\times n}$ شرط RIP مرتبه k را با ثابت $0 \leq \delta_k < 1$ ارضا کند، برای تمامی‌بردارهای k–تنک مثل $\mathbf{x}_{n\times 1}$ می‌دانیم که $\|\mathbf{Ax}\| > 0$. در نتیجه هیچ بردار k–تنکی در فضای پوچ ماتریس قرار نمی‌گیرد. در ماتریس‌های واندرموند با k سطر می‌دانیم که هر k انتخاب از ستون‌های ماتریس مستقل خطی اند. یعنی اگر $\mathbf{A}$ یک ماتریس واندرموند باشد، برای هر بردار k–تنک مثل $\mathbf{x}$ خواهیم داشت $\|\mathbf{Ax}\| > 0$. اما آیا این به منزله‌ی برقراری شرط RIP است؟ برای بررسی بیشتر فرض کنید $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^n$ ستون‌های ماتریس $\mathbf{A}$ و $\{x_i\}_{i=1}^n$ درایه‌های بردار $\mathbf{x}$ باشند به نحوی که تنها $\{x_{i_1},\dots,x_{i_k}\}$ ناصفر اند. در این صورت:

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} = \sum_{j=1}^{k} x_{i_j}\mathbf{a}_{i_j} \tag{۱۹-۳}$$

اگر تعریف کنیم $\mathbf{A}^{(\mathrm{sub})}_{m\times k} = [\mathbf{a}_{i_1}\ \dots\ \mathbf{a}_{i_k}]$، شرط RIP بر روی ماتریس $\mathbf{A}$ ایجاب می‌کند که:

$$\forall \mathbf{x}_{k\times 1}\in\mathbb{R}^k:\quad 1-\delta_k \leq \frac{\|\mathbf{A}^{(\mathrm{sub})}_{m\times k}\mathbf{x}_{k\times 1}\|_{\ell_2}^2}{\|\mathbf{x}_{k\times 1}\|_{\ell_2}^2} \leq 1+\delta_k \tag{۲۰-۳}$$

با کمک نتایج جبرخطی می‌دانیم که عبارت $\frac{\|\mathbf{A}^{(\mathrm{sub})}_{m\times k}\mathbf{x}_{k\times 1}\|_{\ell_2}^2}{\|\mathbf{x}_{k\times 1}\|_{\ell_2}^2}$ همواره بین مربعات حداقل و حداکثر مقادیر تکین[۳] تغییر می‌کند و دو حالت حدی را نیز اختیار می‌کند. به بیان ساده‌تر، شرط RIP برای ماتریس $\mathbf{A}$ محدوده تغییرات مقادیر تکین تمام زیر ماتریس‌های k ستونی آن را تعیین می‌کند. به طور خاص، عدد حالت[۴] تمام زیر ماتریس‌های k ستونی $\mathbf{A}$ باید از کرانی که تنها به δ_k وابسته است کمتر باشند. متاسفانه عدد حالت ماتریس‌های واندرموند به صورت نمایی با افزایش m زیاد می‌شوند [۴۹] و در نتیجه ماتریس واندرموند شرط RIP را تنها برای مقادیر δ_k نزدیک به یک می‌تواند ارضا کند (برای mهای بزرگ). هنگامی‌که δ_k افزایش یابد، فاصله‌ی نسبی بردارهای تکین با فضای پوچ ماتریس کاهش می‌یابند و در نتیجه عمل بازسازی نمونه‌ها از جایی به بعد ناپایدار خواهد شد. به این دلیل گزینه امیداور کننده‌ی ماتریس‌های واندرموند را باید کنار گذاشت.

از اولین روش‌های ساخت ماتریس حسگر یقینی ماتریس حسگر می‌توان به [۵۴] اشاره کرد. در این مقاله به کمک کدهای مرتبه دوم Reed-Muller یک ماتریس حسگر $2^l \times 2^{\frac{l(l+1)}{2}}$ با درایه‌های ± 1 معرفی شده است که ساختاری

[۳] Singular Value

[۴] Condition Number

به صورت

$$\mathbf{A}_{\mathrm{RM}} = \left[\mathbf{U}_1\ \mathbf{U}_2\ \ldots\ \mathbf{U}_{2^{\frac{l(l-1)}{2}}}\right] \qquad (۳-۲۱)$$

دارد که هر کدام از $\mathbf{U}_i$ها یک ماتریس مربعی $2^l \times 2^l$ با ستون‌های متعامد است. در واقع برای زیر ماتریس‌های $\mathbf{U}_i$ از ماتریس $\mathbf{A}_{\mathrm{RM}}$ تمامی‌مقادیر تکین یکسانند که باعث ایجاد حالت ایده آل $\delta_{2^l} = 0$ در این زیر ماتریس‌ها می‌شود. متاسفانه در مورد بقیه‌ی زیر ماتریس‌های $\mathbf{A}_{\mathrm{RM}}$ نتیجه‌ی قابل توجه‌ای وجود ندارد و در نتیجه نمی‌توان برقراری شرط RIP را در این ماتریس تضمین کرد؛ با این حال نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که این ماتریس عملکرد مناسبی دارد.

یکی از مثال‌های معروف از ماتریس‌های یقینی، ماتریس‌های بر مبنای توابع Chirp هستند [۹]. فرض کنید m یک عدد طبیعی است؛ هر عدد بین ۱ تا m^2 را می‌توان به صورت $\alpha m + \beta$ که $0 \leq \alpha \leq m-1$ و $1 \leq \beta \leq m$ نمایش داد. ماتریس $m \times m^2$ بر مبنای توابع Chirp ($\mathbf{A}_{\mathrm{chirp}}$) با درایه‌های a_{ik} به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k = \alpha m + \beta \leq m^2 \end{cases} \Rightarrow\ a_{ik} = e^{j\frac{2\pi}{m}(\alpha i^2 + \beta i)} \qquad (۳-۲۲)$$

ماتریس حاصل درایه‌های مختلط با اندازه واحد (قبل از نرمالیزه کردن با $\frac{1}{\sqrt{m}}$) و سطرهای عمود بر هم‌دارد:

$$\langle \mathrm{row}_{i_1}, \mathrm{row}_{i_2}\rangle = \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\beta=1}^{m} e^{j\frac{2\pi}{m}(\alpha i_1^2 + \beta i_1 - \alpha i_2^2 - \beta i_2)} = \sum_{\alpha=0}^{m-1} e^{j\frac{2\pi}{m}\alpha(i_1^2 - i_2^2)} \underbrace{\sum_{\beta=1}^{m} e^{j\frac{2\pi}{m}\beta(i_1 - i_2)}}_{0} = 0 \qquad (۳-۲۳)$$

در [۹] نشان داده شده است که این ماتریس تا حدی خواص ماتریس‌های واندرموند را دارد، به این صورت که در ماتریس $m \times m^2$، هر $\sqrt{m}$ ستون مستقل خطی اند و در نتیجه اگر این ماتریس برای نمونه‌برداری از یک بردار k-تنک با $k \leq \frac{\sqrt{m}+1}{2}$ مورد استفاده قرارگیرد، نمونه‌های بدست آمده به طور یکتا بردار تنک را مشخص می‌کنند. متاسفانه هیچ‌گونه تضمینی برای برقراری شرط RIP در این ماتریس‌ها به اثبات نرسیده است. از نکات مثبت این ماتریس‌ها روش بازسازی بسیار ساده‌ی آنهاست؛ برای بازسازی سیگنال تنک می‌توان به نوعی از تبدیل DFT بردار خود همبستگی نمونه‌ها استفاده کرد و مکان‌های ناصفر سیگنال تنک را آشکار کرد. به دلیل استفاده از الگوریتم FFT پیچیدگی محاسباتی در این روش بسیار پایین است.

در فصل ۴ نشان خواهیم داد که اگر ضریب همدوسی ماتریس $\mathbf{A}$ کمتر از $\frac{1}{k-1}$ باشد، این ماتریس شرط RIP را برآورده خواهد کرد. تاکنون این مطلب تنها روش تضمین شرط RIP در ماتریس‌ها بوده است. همان

طور که در فصل ۱ اشاره شد، با استفاده از این مطلب نمی‌توان به ماتریس‌هایی با ابعادی که ماتریس‌های تصادفی پیشنهاد می‌کنند رسید. از مثال‌های ساده ماتریس با ضریب همبستگی کم می‌توان به‌ترکیب ماتریس همانی و ماتریس DFT اشاره کرد. فرض کنید $\mathbf{I}_{m\times m}$ و $\mathbf{F}_{m\times m}$ به‌ترتیب ماتریس همانی و ماتریس یکانی تبدیل فوریه باشند و قرار دهید $\mathbf{A}_{m\times 2m}=[\mathbf{I}_{m\times m}\ \mathbf{F}_{m\times m}]$. فرض کنید $\mathbf{a}_{m\times 1},\mathbf{b}_{m\times 1}$ دو ستون متمایز از این ماتریس باشند. اگر هر دو بردار متعلق به یکی از ماتریس‌های $\mathbf{I}_{m\times m}$ یا $\mathbf{F}_{m\times m}$ باشند، بر هم‌عمود خواهند بود. در غیر این صورت یکی از دو بردار (مثلاً $\mathbf{a}_{m\times 1}$) متعلق به $\mathbf{I}_{m\times m}$ و دیگری متعلق به $\mathbf{F}_{m\times m}$ است. از آن‌جا که $\mathbf{a}_{m\times 1}$ تنها یک درایه ناصفر دارد و اندازه تمامی‌المان‌های $\mathbf{b}_{m\times 1}$ برابر $\frac{1}{\sqrt{m}}$ است، داریم:

$$\big|\langle \mathbf{a}_{m\times 1},\mathbf{b}_{m\times 1}\rangle\big|=\frac{1}{\sqrt{m}} \tag{۳-۲۴}$$

در نتیجه علاوه بر این که ستون‌های $\mathbf{A}$ یکه‌اند، اندازه ضرب داخلی هر جفت از آن‌ها حداکثر $\frac{1}{\sqrt{m}}$ است، پس $\mu_{\mathbf{A}}=\frac{1}{\sqrt{m}}$. این بدان معنی است که ماتریس $\mathbf{A}$ شرط RIP از مرتبه $k=\lceil\sqrt{m}\,\rceil$ را برآورده می‌کند. در مثال فوق، ماتریس‌های همانی و DFT دو ماتریس یکانی بودند که اندازه ضرب داخلی هر دو ستون از آن‌ها مقدار ثابت $\frac{1}{\sqrt{m}}$ بود. به چنین ماتریس‌هایی غیرهمدوس می‌گویند؛ برای واضح‌تر شدن این موضوع، فرض کنید $\mathbf{C}_{m\times m}$ و $\mathbf{D}_{m\times m}$ دو ماتریس یکانی باشند و $\{\mathbf{c}_i\}_{i=1}^{m}$ و $\{\mathbf{d}_i\}_{i=1}^{m}$ به‌ترتیب ستون‌های $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ باشند. از آن‌جا که $\mathbf{C}$ یکانی است، در رابطه پارسوال[5] صدق می‌کند:

$$1=\|\mathbf{d}_i\|_{\ell_2}^2=\|\mathbf{C}\mathbf{d}_i\|_{\ell_2}^2=\sum_{j=1}^{m}|\langle\mathbf{c}_j,\mathbf{d}_i\rangle|^2 \tag{۳-۲۵}$$

در نتیجه حداقل برای یکی از $\mathbf{c}_j$ها، $\frac{1}{\sqrt{m}}\le|\langle\mathbf{c}_j,\mathbf{d}_i\rangle|$. پس $\frac{1}{\sqrt{m}}$ یک کران پایین برای حداکثر اندازه ضرب داخلی بین ستون‌های دو ماتریس یکانی است. به وضوح تساوی هنگامی رخ می‌دهد که اندازه ضرب داخلی هر ستون از $\mathbf{C}_{m\times m}$ با هر ستون از $\mathbf{D}_{m\times m}$ مقداری ثابت باشد؛ از این رو، در این حالت به دو ماتریس غیرهمدوس می‌گویند. زوج‌های غیرهمدوس تنها محدود به ماتریس همانی و DFT نمی‌شوند اما برای تمام این حالات، ماتریس ادغامی‌حاصل $m\times 2m$ خواهد بود.

تعمیم‌هایی از روش فوق به بیش از $2m$ ستون نیز مطرح شده است؛ به عنوان مثال، در حالاتی خاص با کنار هم‌قرار دادن چند ماتریس یکانی می‌توان به ماتریس با ضریب همدوسی کوچک دست یافت، اما از آن‌جا که به دنبال کاهش ضریب همدوسی ماتریس هستیم به جای کنار هم قرار دادن ماتریس‌های یکانی بهتر است

[5] Parseval

ستون‌ها را به نحو مناسب‌تری انتخاب کنیم. یکی از ابزارهای قوی در این راستا فریم‌های گراسمانی[۶] هستند [۸۷]. به مجموعه $\{\mathbf{a}_i\} \subset \mathbb{R}^m$ فریم گوییم هرگاه ضرایب $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$،

$$\alpha\|\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2 \leq \sum_i |\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle|^2 \leq \beta\|\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2 \qquad (۳-۲۶)$$

در واقع یک فریم مجموعه‌ای از بردارهاست که توسط ضرب داخلی، نرم بردارها را تا حدی ثابت نگه می‌دارند. در صورتی که $\alpha = \beta$، فریم اصطلاحاً تنگ[۷] نامیده می‌شود. در این فریم‌ها به نوعی قضیه پارسوال صادق است؛ در نتیجه از این جهت بسیار شبیه پایه‌های متعامد یکه هستند. نوع دیگری از فریم‌ها وجود دارند که از جهت ضریب همدوسی به پایه‌های متعامد یکه شبیه‌اند: در صورتی که به بردارهای یکه در فضای m بعدی محدود باشیم و بخواهیم m بردار به نحوی انتخاب کنیم که ضریب همدوسی بین آن‌ها حداقل شود، پایه متعامد یکه با ضریب همدوسی صفر جواب خواهد بود. حال اگر بخواهیم بیش از m بردار انتخاب کنیم، حتماً ضریب همدوسی بزرگتر از صفر خواهد بود. به مجموعه n عضوی از بردارهای m بعدی $(m \leq n)$ با نرم واحد که کوچکترین ضریب همدوسی ممکن بین تمامی‌حالات را دارند، فریم گراسمانی گویند. در فصل ۱ بیان کردیم که $\sqrt{\frac{n-m}{m(n-1)}}$ یک کران پایین برای ضریب همدوسی این مجموعه است (نامساوی ولش) اما آیا می‌توان به این کران دست یافت؟ نکته جالب در این‌جاست که اگر ضریب همدوسی مجموعه‌ای برابر با این کران پایین باشد، حتماً فریم تنگ است [۸۷]. علاوه بر این، این کران تنها برای $n \leq \frac{m(m+1)}{2}$ قابل دستیابی است و وجود چنین مجموعه‌هایی در این حالت نیز اثبات شده است اما به غیر از حالات $\frac{n}{m} \leq 2$، ساخت این مجموعه‌ها مستلزم جستجو است. یعنی نه تنها فرم بسته‌ای برای این ساختارها در دسترس نیست، بلکه تعداد اعضا از تابعی درجه ۲ نسبت به بعد فضا کوچکتر است. این نتیجه اختلاف عمیقی بین ابعاد پیشنهادی ماتریس‌های تصادفی (رابطه لگاریتمی n با m) و این ساختارها را روشن می‌کند.

از جمله موفق‌ترین طرح‌ها در ماتریس‌های حسگر، روش ارائه شده در [۳۸] است. در این روش به کمک چند جمله ای‌ها در میدان متناهی، ماتریس‌های $p^2 \times p^{r+1}$ طراحی شده‌اند که شرط RIP از مرتبه $k < \frac{p}{r} + 1$ را ارضا می‌کند. دقت کنید که در این روش، تعداد ستون‌ها $(n = p^{r+1})$ لزوماً به تابعی درجه ۲ از تعداد سطرها $(m = p^2)$ محدود نیست؛ البته این ساختار به قیمت فاصله گرفتن از کران ولش حاصل شده است. در زیر به

[۶] Grassmanian Frames

[۷] Tight

طور مختصر نحوه‌ی ساخت ماتریس بیان می‌شود:

فرض کنید p توانی از یک عدد اول و $GF(p)$ میدان متناهی با مرتبه p باشد. فرض کنید $Q(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب $GF(p)$ باشد و $\mathcal{G}(Q)$ مجموعه تمام زوج‌های مرتب به صورت $\big(x, Q(x)\big)$ که $x \in GF(p)$؛ یعنی $\mathcal{G}(Q)$ یک مجموعه p عضوی است. حال فرض کنید $\mathcal{B}$ مجموعه تمام زوج‌های مرتب $GF(p) \times GF(p)$ باشد که به وضوح $p^{۲}$ عضوی خواهد بود. برای سادگی نمایش، فرض کنید $\mathcal{B} = \{b_{۱}, \dots, b_{p^{۲}}\}$ که هر b_i یک زوج مرتب است و زوج‌ها باترتیب واژه ای[۸] مرتب شده‌اند. بـرای هـر چنـد جمله‌ای مثل Q، یک بردار $p^{۲}$ تایی ($\mathbf{v}_Q$) با درایه‌های ۰،۱ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v}_Q = [v_{۱}, \dots, v_{p^{۲}}]^T \quad , \quad v_i = \begin{cases} ۰ & b_i \notin \mathcal{G}(Q) \\ ۱ & b_i \in \mathcal{G}(Q) \end{cases} \qquad (۳\text{–}۲۷)$$

بنابراین $\mathbf{v}_Q$ دقیقاً شامل p تا یک و $p(p-۱)$ صفر است. اکنون فرض کنید $\mathcal{P}_r$ مجموعه تمام چند جمله‌ای‌های $GF(p)[x]$ با درجه حداکثر r باشد:

$$\mathcal{P}_r = \big\{a_{۰} + a_{۱}x + \cdots + a_r x^r \;\big|\; a_i \in GF(p)\big\} \qquad (۳\text{–}۲۸)$$

در این صورت $\mathcal{P}_r$ یک مجموعه $p^{r+۱}$ عضوی خواهد بود:

$$\mathcal{P}_r = \big\{Q_{۱}, Q_{۲}, \dots, Q_{p^{r+۱}}\big\} \qquad (۳\text{–}۲۹)$$

از آنجا که درجه چند جمله ای‌ها حداکثر r است، تساوی $Q_i(x) = Q_j(x)$ حداکثر برای r مقدار x اتفاق می‌افتد و در نتیجه $\langle \mathbf{v}_{Q_i}, \mathbf{v}_{Q_j} \rangle \leq r$. پس اگر بردارهای $\mathbf{v}_{Q_i}$ را با ضریب $\frac{۱}{\sqrt{p}}$ یکه کنیم مجموعه‌ای از بردارهای یکه با ضریب همدوسی $\frac{r}{p}$ بدست می‌آوریم که برای تشکیل ماتریسی با شرط RIP از مرتبه $k < \frac{p}{r} + ۱$ کفایت می‌کنند.

در روش‌های مبتنی بر ضریب همدوسی همواره داریم $m \geq \mathcal{O}(k^{۲})$. در چند ساختار ارائه شد به کمک گراف، ماتریس‌هایی معرفی شده‌اند که $m = \mathcal{O}(k)$، ولی به جای شرط RIP شرط‌های ضعیف‌تری وجود دارند که کماکان عمل بازسازی را میسر می‌سازند. به عنوان مثال، در [۵۵] به کمک ماتریس مجاورت گراف‌های Extractor ماتریس‌های $m = k۲^{\mathcal{O}(\log\log n)^{۲}}$ ارائه شده‌اند که قادر به بازیابی سیگنال‌های k–تنک هستند. گراف دو بخشی G را با بخش‌های A و B به طوری که $|A| = n$ و $|B| = k$ در نظر بگیرید. فرض کنید درجه تمام رأس‌های A برابر با $d_A = ۲^{\mathcal{O}(\log\log n)^{۲}}$ باشد و برای هر زیرمجموعه از رأس‌های G مانند X فرض کنید $\Gamma(X)$

[۸] Lexicographic

همسایه‌های X در G باشند. این گراف را ϵ-Extractor گوییم هرگاه برای هر زیرمجموعه حداقل k عضوی از A داشته باشیم:

$$\sum_{b\in B}\left|\frac{|\Gamma(b)\cap X|}{d_A\cdot|X|}-\frac{1}{k}\right|\le\epsilon \tag{۳-۳۰}$$

شرط فوق به طور ضمنی بیان می‌کند که یالهای مربوط به رأس‌های مجموعه‌های k عضوی (و بیشتر) از A درجه تقریباً یکسانی در رأس‌های B ایجاد می‌کنند. نحوه ساخت چنین ماتریس‌های برای $\epsilon > 0$ قبلاً بررسی شده است. در مقاله [۵۵] بر اساس ماتریس مجاورت گراف‌های $\frac{1}{16}$-Extractor، ماتریس‌های حسگری معرفی شده است که بدون برقراری شرط RIP قابلیت بازسازی سیگنالهای k–تنک را فراهم می‌کنند؛ البته نحوه بازسازی ارائه شده تنها هنگامی کارآمد است که نمونه‌ها بدون نویز باشند.

براساس گراف‌های Expander طرح دیگری برای ماتریس‌های حسگر در [۵۷] با ابعاد $m=\mathcal{O}(k\log\frac{n}{k})$ معرفی شده‌اند. با وجود این که این طرح به صورت ساختاری ارائه شده است، در ساختن ماتریس نیاز به گراف‌هایی است که خود با جستجو بدست می‌آیند. نکته قوت این روش در نحوه تایید ماتریس است؛ در حالت کلی بررسی شرط RIP در ماتریس مسأله NP به شمار می‌رود، حال آن که در طرح ارائه شده بررسی مناسب بودن گراف در زمان چندجمله‌ای صورت می‌پذیرد. همچنین ماتریس مجاورت این گراف‌ها که به عنوان ماتریس حسگر مورد استفاده قرار می‌گیرند، به جای نرم ℓ_2، شرط RIP با نرم ℓ_1 را ارضا می‌کنند. بررسی‌های انجام شده در [۵۷] نشان می‌دهند که این شرط نیز می‌تواند بازسازی پایدار را تضمین کند. نکته قابل توجه در این طرح روش بازسازی است؛ به دلیل استفاده از گراف‌های Expander می‌توان بازسازی را به کمک الگوریتم Belief Propagation انجام داد.

همان گونه که در ابتدا ذکر شد، شرط RIP از مرتبه k با ثابت δ_k ایجاب می‌کند که مربع مقادیر تکین تمام زیر ماتریس‌های k ستونی ماتریس اصلی در بازه $[1-\delta_k, 1+\delta_k]$ قرار گیرند. در صورتی که حتی فقط برای یک زیر ماتریس این خاصیت برقرار نباشد، ماتریس شرط RIP را ندارد، اما ممکن است قادر به بازسازی بسیاری از بردارهای k–تنک باشد. برای بیان قابلیت ناقص بازسازی، شرط RIP احتمالاتی در [۱۹] مطرح شده است.

گوییم ماتریس $\mathbf{A}_{m\times n}$ شرط StRIP با پارامترهای (k,δ,ϵ) را ارضا می‌کند هرگاه نامساوی‌های

$$(1-\delta)\|\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2\le\left\|\frac{1}{\sqrt{m}}\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}\right\|_{\ell_2}^2\le(1+\delta)\|\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2 \tag{۳-۳۱}$$

با احتمال $1-\epsilon$ برای بردارهای k–تنک برقرار باشند که در آن بردارهای k–تنک و هم‌نرم، هم‌احتمال فرض شده‌اند. بوضوح شرط StRIP ضعیف‌تر از RIP است و در نتیجه دسته بزرگتری از ماتریس‌ها را شامل می‌شود. یکی از نتایج مهم خاصیت StRIP این است که شرط کافی ساده‌تری نسبت به RIP برای آن وجود دارد. فرض کنید سه شرط زیر در مورد ماتریس $\mathbf{A}$ صادق باشند:

۱. سطرهای $\mathbf{A}$ بر یکدیگر عمودند و جمع درایه‌های هر سطر صفر است؛

۲. ستون‌های $\mathbf{A}$ تحت عمل ضرب درایه به درایه تشکیل گروه می‌دهند، به طور خاص ستون اول $\mathbf{A}$ تمام یک است؛

۳. جمع اندازه درایه‌های هر ستون به غیر از ستون تمام یک، حداکثر $m^{1-\frac{\eta}{2}}$ است که $\eta > 0/5$؛

در این صورت ثابت c وجود دارد که اگر $k < 1 + (n-1)\eta$ و $m \geq \left(c\frac{k\log n}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{\eta}}$، ماتریس $\mathbf{A}_{m\times n}$ شرط StRIP با پارامترهای (k,δ,ϵ) را ارضا خواهد کرد که

$$\epsilon = 2e^{-\frac{(\delta-\frac{k-1}{n-1})^2 n^\eta}{8k}} \tag{۳–۳۲}$$

برخلاف شرط RIP، بررسی سه خاصیت ذکر شده به سادگی میسر است و در نتیجه اثبات StRIP بسیار ساده‌تر از RIP صورت می‌گیرد. از جمله ماتریس‌هایی که شرط StRIP را ارضا می‌کنند ماتریس‌های بر مبنای توابع Chirp هستند.