

## فصل ۵

# نمونه برداری غیر تصادفی غیر خطی

### ۱-۵ مقدمه

در فصل‌های پیشین دیدیم که ماتریس‌های تصادفی، مستقل از حوزه تنک‌بودن سیگنال (ماتریس  $\Psi$ )، قادر به انجام عمل نمونه‌برداری با احتمال بازسازی مطلوب (به اندازه کافی بزرگ) هستند. از سوی دیگر، در صورت معلوم بودن حوزه تنک‌بودن، روش‌هایی برای طراحی ماتریس حسگر یقینی معرفی کردیم که بازسازی کامل را تضمین می‌کنند. برای این منظور مساله را در دو حالت معلوم و یا نامعلوم بودن حوزه تنک‌بودن بررسی می‌کنیم. در حالت حوزه معلوم، بررسی می‌کنیم که آیا با غیرخطی کردن نحوه نمونه‌برداری می‌توان در نرخ فشرده‌سازی و پیچیدگی محاسباتی در بازسازی به بهبودی دست یافت. قسمتی از مطالب این فصل بر گرفته از [۵] هستند.

### ۲-۵ نمونه برداری غیر تصادفی برای حوزه تنک‌بودن نامعلوم

در این بخش به دنبال بررسی مساله نمونه‌برداری یقینی، هنگام ناشناخته بودن حوزه تنک‌بودن سیگنال هستیم؛ به بیان دیگر، اگر  $\Psi$  در هنگام نمونه‌برداری معلوم نباشد، آیا می‌توان از یک روش نمونه‌برداری ثابت و غیر تصادفی استفاده کرد بدون این که قابلیت بازسازی از بین برود؟ در این جا، نمونه‌برداری لزوماً به روش‌های خطی مثل استفاده از یک ماتریس  $\Phi$  محدود نیست. یعنی در حالت کلی، در پی یافتن روش نمونه‌برداری هستیم که مستقل از حوزه تنک‌بودن سیگنال، بتوان آن را بازسازی کرد. برای بررسی، ابتدا از روش خطی ضرب ماتریس  $\Phi$  (مشابه فصل قبل) آغاز می‌کنیم؛ اگر  $\Phi_{m \times n}$  ماتریس ثابتی با  $m \geq n$  باشد، تعداد نمونه‌ها بیشتر یا مساوی نمونه‌های اولیه

سیگنال است که مسلماً متناقض با تمام اهداف نمونه برداری فشرده است. در حالت  $m < n$  نیز فضای پوچ  $\Phi$  بعد  $n - m > 0$  خواهد داشت. در نتیجه:

$$\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{v}\|_{\ell_2} = 1 : \Phi \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1-5)$$

فرض کنید  $V^\perp$  فضای حاصل از تمام بردارهای عمود بر  $\mathbf{v}$  در  $\mathbb{R}^n$  باشد؛ در نتیجه بعد  $V^\perp$  برابر با  $n - 1$  است و می توان بردارهای متعامد یکه  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$  را به عنوان پایه برای  $V^\perp$  اختیار کرد. بنابراین مجموعه بردارهای  $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$  برای  $\mathbb{R}^n$  تشکیل یک پایه متعامد یکه می دهند. اگر چنین تعریفی داشته باشیم:

$$\Psi = [\mathbf{v} \ \mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_{n-1}] \Rightarrow \mathbf{v} = \Psi \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

در نتیجه،  $\mathbf{v}$  در حوزه متعامد یکه  $\Psi$  به صورت ۱-تنک بیان می شود اما  $\Phi \cdot \mathbf{v} = 0$ ؛ بنابراین بردار ۱-تنکی وجود دارد که توسط نمونه های تولید شده با  $\Phi$  قابل بازسازی نیست. در نتیجه، در هر نوع نمونه برداری خطی، بردارهای تنکی وجود دارند که قابل بازسازی نیستند. اکنون به نمونه برداری های غیر خطی می پردازیم؛ به عبارت دیگر، در پی توابع نمونه برداری  $f_1, \dots, f_n$  هستیم که از روی نمونه های تولید شده آن ها بتوان بردار تنک ورودی را بدست آورد:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(\mathbf{x}) = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(\mathbf{x}) = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (3-5)$$

نکته مهمی که باید به آن اشاره کرد این است که  $\mathbb{R}^n$  و  $\mathbb{R}$  از نظر Cardinality با هم برابرند؛ یعنی تابع یک به یک و پوشای  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  وجود دارد که تمامی بردارهای  $n$  تایی را به طور یک به یک با اعداد حقیقی، متناظر می کند. اگر از این تابع برای نمونه برداری استفاده شود، تمام  $n$  نمونه ی اولیه را حتی بدون نیاز به شرط تنک بودن، در یک نمونه نهایی، فشرده کرده ایم. با وجود قابلیت فشرده سازی حیرت انگیز این تابع، مشکلی اساسی وجود دارد: چنانچه نمونه نهایی چندی شود، تمام اطلاعات (تمام  $n$  نمونه ی اولیه) از بین می روند! بدیهی است که این قابلیت فشرده سازی بدون چندی کردن هیچ ارزش عملی ندارد. به بیان ساده تر، روشی مورد نظر است که پس از چندی کردن نمونه ها، هنوز قادر به بازسازی سیگنال اولیه (با احتساب خطایی محدود) باشد. در نتیجه، حتماً باید از شرط تنک بودن استفاده شود؛ یعنی بردار  $\mathbf{x}$  تنها برداری از  $\mathbb{R}^n$  نباشد که نمونه های  $\mathbf{y}_{m \times 1}$

را تولید می کند بلکه تنها بردار تنک با این خاصیت باشد. نشان خواهیم داد که اگر هدف بازسازی سیگنال های  $k$ -تنک برای  $k \geq 2$  باشد، حتی توابع غیر خطی (با قابلیت چندی کردن) نیز کارآمد نخواهند بود؛ اما برای حالت  $k = 1$  چنین توابعی قابل ارائه است. فرض کنید  $k \geq 2$  و  $(y_1, \dots, y_m)$  نمونه های بدست آمده از بردار  $\mathbf{x}_n \times 1$  با توابع نمونه برداری  $(f_1, \dots, f_m)$  باشند، تعریف کنید:

$$S = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \forall 1 \leq i \leq m : f_i(\mathbf{z}) = y_i\} \quad (4-5)$$

به بیان دیگر، مجموعه  $S$  شامل تمام بردارهایی است که نمونه های تولید شده آن ها با نمونه های تولید شده از  $\mathbf{x}_n \times 1$  برابرند و در نتیجه ابهام ما در بازسازی به انتخاب یکی از اعضای  $S$  محدود می شود. از آنجا که  $\mathbf{x}_n \times 1 \in S$  پس  $S \neq \emptyset$ . از طرف دیگر مشابه استدلالی که در قبل به آن اشاره شد،  $\mathbf{x}_n \times 1$  نمی تواند تنها عضو  $S$  باشد زیرا در این صورت بدون توجه به شرط تنک بودن، سیگنال  $\mathbf{x}_n \times 1$  بازسازی می شود:

$$\exists \mathbf{v}_0 \in S, \mathbf{v}_0 \neq \mathbf{x}_n \times 1 \quad (5-5)$$

تعریف کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle}{\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \rangle} \mathbf{v}_0 \quad (6-5)$$

که منظور از  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  ضرب داخلی دو بردار  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  است. فرض کنید  $\tilde{\mathbf{v}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_1$  بردارهای یکه در راستاهای  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$  باشند. همچنین فرض کنید  $V^\perp$  فضای ساخته شده از تمام بردارهای عمود بر  $\tilde{\mathbf{v}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_1$  و  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-2}\}$  پایه ای متعامد یکه برای این فضا باشد:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle}{\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \rangle} \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \rangle = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{v}_0 &\perp \mathbf{v}_1 \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}}_0 \perp \tilde{\mathbf{v}}_1 \end{aligned} \quad (7-5)$$

بنابراین،  $\{\tilde{\mathbf{v}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-2}\}$  تشکیل یک پایه متعامد یکه برای  $\mathbb{R}^n$  می دهند. اگر ماتریس  $\Psi$  را از کنار هم قراردادن این بردارها بوجود آوریم  $(\Psi = [\tilde{\mathbf{v}}_0 \ \tilde{\mathbf{v}}_1 \ \mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_{n-2}])$ ، ماتریس  $\Psi$  متعامد یکه خواهد بود و

بردارهای  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{v}_0$  در این حوزه، نمایش تنک دارند:

$$\mathbf{v}_0 = \|\mathbf{v}_0\|_{\ell_r} \tilde{\mathbf{v}}_0 \Rightarrow \Psi \cdot \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_0\|_{\ell_r} \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle}{\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \rangle} \mathbf{v}_0 = \|\mathbf{v}_1\|_{\ell_r} \tilde{\mathbf{v}}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle \tilde{\mathbf{v}}_0 \Rightarrow \Psi \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle \\ \|\mathbf{v}_1\|_{\ell_r} \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} = \mathbf{x} \quad (۸-۵)$$

یعنی  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{v}_0$  در این حوزه به ترتیب ۲-تنک و ۱-تنک هستند و از آنجا که  $k \geq 2$  است، هر دو این پاسخها قابل قبولاند؛ بنابراین مسئله جواب یکتا ندارد. اگر  $k = 1$  باشد، از آنجا که یکی از پاسخهای فوق ۲-تنک است، قابل قبول نیست و در نتیجه حالت  $k = 1$  باید جداگانه بررسی شود. درواقع، برای  $k = 1$  چنین توابعی وجود دارند که قبل از معرفی این توابع، ابتدا یک شرط لازم و کافی بیان می شود:

لم ۵-۱ مجموعه  $S \subset \mathbb{R}^n$  قابلیت بازسازی یکتا برای سیگنالهای ۱-تنک را نسبت به حوزه تنک بودن دلخواه فراهم می کند اگر و فقط اگر:

$$\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in S: \quad 0 < |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| < \|\mathbf{a}\|_{\ell_r} \|\mathbf{b}\|_{\ell_r} \quad (۹-۵)$$

قبل از اثبات لم فوق، باید به دو نکته اشاره کرد: اول این که قدر مطلق هر عدد حقیقی، نامنفی است؛ پس تنها نکته نابديهی در نامساوی سمت چپ، عدم تساوی با صفر است. به عبارت بهتر، برقراری نامساوی سمت چپ ایجاب می کند که هیچ دو عضوی از  $S$  بر یکدیگر عمود نباشند؛ نکته دوم این است که با استفاده از نامساوی کوشی، چنین داریم:

$$\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n: \quad |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \|\mathbf{a}\|_{\ell_r} \|\mathbf{b}\|_{\ell_r} \quad (۱۰-۵)$$

و تساوی زمانی رخ می دهد که  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  در یک راستا باشند:

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\|_{\ell_r} \|\mathbf{b}\|_{\ell_r} \iff \exists c \in \mathbb{R}: \mathbf{a} = c\mathbf{b} \quad (۱۱-۵)$$

بنابراین مجدداً، تنها نکته غیربديهی در نامساوی سمت راست (۹-۵)، عدم تساوی است؛ یعنی هیچ دو عضوی از  $S$  همراستا نیستند. اکنون نشان می دهیم اگر  $S$  شرایط لم فوق را ارضا کند، برای هر  $\Psi$  متعامد یکه

دلخواه، حداکثر یک عضو از  $S$  در حوزه  $\Psi$  نمایش ۱-تنک دارد. فرض کنید  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S$  و هر دوی  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  نمایش ۱-تنک در حوزه یک  $\Psi$  متعامد یکه داشته باشند؛ بنابراین هرکدام از  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ضریبی از یکی از ستون‌های  $\Psi$  خواهند بود. اگر هر دو، ضریبی از یک ستون خاص در  $\Psi$  باشند، چون راستای هر دو با راستای این ستون از  $\Psi$  یکسان است،  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  همراستا خواهند بود که مغایر با شرط لم است. در صورتی هم که ستون‌های مربوط به  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  در  $\Psi$  متمایز باشند، به دلیل ساختار متعامد یکه  $\Psi$ ، این دو ستون بر هم عمودند و در نتیجه  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  متعامد خواهند بود که مشابهاً متناقض با شرط لم است. پس چنین  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  نمی‌توانند موجود باشند؛ در حوزه  $\Psi$  حداکثر یک عضو از  $S$  نمایش ۱-تنک دارد. اثبات عکس مطلب فوق (لازم بودن شرایط) نیز به صورت مشابهی قابل بیان است. حال باید توابعی معرفی کنیم که کلاس‌های هم‌ارزی خروجی‌های آنها مجموعه‌هایی با شرایط ذکر شده در لم باشد. نشان می‌دهیم که دو تابع نمونه برداری زیر چنین شرایطی را ایجاد می‌کنند:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} \text{sign}(x_i) \\ f_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}_{n \times 1}\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^n |x_i| \end{cases} \quad (12-5)$$

که در آن:

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases} \quad (13-5)$$

در واقع تابع  $f_1$  تنها بیانگر علامت درایه‌های بردار  $\mathbf{x}_{n \times 1}$  است (به تعبیری بسط مبنای ۳ تولید شده است). می‌توان به جای تابع  $f_1$  از  $n$  تا تابع مجزا برای علامت هر درایه استفاده کرد. از آنجا که بازه تغییرات  $f_1$  بین  $-\frac{2^n-1}{2}$ ،  $\frac{2^n-1}{2}$  محدود است، برای چندی کردن خروجی این تابع، حداکثر  $\lceil n \log_2 3 \rceil$  بیت مورد نیاز است. قبل از بررسی اثر چندی کردن خروجی تابع  $f_1$ ، ابتدا نشان می‌دهیم که شرایط لم صادق است. اگر  $f_1(\mathbf{x}) = 0$  باشد، تنها حالت قابل قبول  $\mathbf{x}_{n \times 1} = 0$  است (با توجه به علامت درایه‌ها). بنابراین، در چنین حالتی حتی بدون نیاز به خروجی تابع  $f_2$ ، ورودی نمونه برداری به طور یکتا بازسازی می‌شود. اگر برای دو بردار  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  چنین داشته باشیم:  $f_1(\mathbf{a}) = f_2(\mathbf{b}) \neq 0$ ، در این صورت علامت درایه‌های متناظر  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  مشابه است و در بین درایه‌های هرکدام، حداقل یک عدد ناصفر وجود دارد:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = [a_1 \dots a_n]^T \\ \mathbf{b} = [b_1 \dots b_n]^T \end{cases} \quad f_1(\mathbf{a}) = f_2(\mathbf{b}) \Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n : \text{sign}(a_i) = \text{sign}(b_i)$$

$$\Rightarrow a_i b_i \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq 0 \Rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \geq 0 \quad (14-5)$$

و تساوی هم اتفاق نمی افتد زیرا دست کم برای یک مقدار  $i$  حاصل،  $a_i b_i$  ناصفر خواهد بود:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0 \quad (15-5)$$

به بیان دیگر، اگر  $f_1(\mathbf{a}) = f_1(\mathbf{b})$ ، دو بردار  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  نمی توانند عمود باشند (به جز در حالت صفر). بنابراین از بین راستاهای ۱-تنکی که ماتریس متعامد یک دلخواه  $\Psi$  ایجاد می کند، حداکثر یکی می تواند نمونه حاصل از  $f_1$  را تولید کند. تنها نکته باقی مانده این است که نمونه حاصل از  $f_2$  ایجاب می کند که در هر راستای دلخواه، حداکثر یک بردار، نمونه های حاصل از  $f_1$  و  $f_2$  را ایجاد کند. اگر  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  هم راستا باشند، چنین است:

$$\exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = c\mathbf{b} \Rightarrow f_2(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|_{\ell_1} = |c| \|\mathbf{b}\|_{\ell_1} = |c| f_2(\mathbf{b}) \quad (16-5)$$

پس اگر  $f_2(\mathbf{a}) = f_2(\mathbf{b})$ ، باید  $|c| = 1$  باشد. حالت  $c = 1$  حالت مورد نظر است و تناقضی ایجاد نمی کند اما حالت  $c = -1$  قابل قبول نیست:

$$c = -1 \Rightarrow \mathbf{a} = -\mathbf{b} \Rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -\|\mathbf{b}\|_{\ell_1}^2 \quad (17-5)$$

که با شرط تولید شده از  $f_1(\mathbf{a}) = f_1(\mathbf{b})$  در تضاد است. بنابراین ثابت شد که توسط نمونه برداری به کمک دو تابع  $f_1$  و  $f_2$  معرفی شده، مستقل از انتخاب حوزه تنک بودن (ماتریس  $\Psi$ )، حداکثر یک بردار ۱-تنک بازسازی می شود. همان طور که مشاهده شد، راستای بردار ۱-تنک توسط نمونه حاصل از  $f_1$  تعیین می شود و در نتیجه با چندی کردن خروجی تابع  $f_2$ ، راستای سیگنال بازسازی شده تغییر نمی کند! تنها تفاوتی که بوجود می آید در اندازه بردار بازسازی شده است. به سهولت می توان مشاهده کرد که خطای تولید شده در اندازه بردار، به طور خطی متناسب با خطای ناشی از چندی کردن نمونه حاصل از  $f_2$  است. پس، خطاهای کوچک ورودی، به خطاهای کوچک خروجی تبدیل می شوند. اگر به جای بردارهای  $\mathbb{R}^n$ ، بردارهای  $\mathbb{C}^n$  مورد نظر باشند، به جای دو تابع فوق باید از سه تابع زیر استفاده کرد:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{I}^{2(i-1)} \text{sign}(\Re x_i) + \mathfrak{I}^{2i-1} \text{sign}(\Im x_i) \\ f_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n |x_i| \\ f_3(\mathbf{x}) = \sum_{x_i \neq 0} \frac{\text{msign}(\Re x_i) \cdot \Im x_i}{|\Re x_i| + |\Im x_i|} \end{cases} \quad (18-5)$$

که در آن:

$$\text{msign}(a) = \begin{cases} 1 & a \geq 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases} \quad (19-5)$$

دو تابع اول تقریباً مشابه توابع قبلی هستند و نقش مشابهی ایفا می کنند؛ تابع سوم برای بازیابی فاز است. برای پرهیز از طولانی شدن متن، حالت  $\mathbb{C}^n$  را اثبات نمی کنیم.

### ۳-۵ نمونه برداری غیر تصادفی برای حوزه تنک بودن معلوم

از ابتدایی ترین مفروضات نمونه برداری فشرده، خطی بودن نحوه نمونه برداری است. خطی بودن، مزایای بسیاری از جمله قابلیت تحلیل ساده و تقویت نکردن نویز جمعی را در بر دارد، اما آیا می توان با ورود به روش های نمونه برداری غیر خطی مزیتی بدست آورد؟ در این بخش نشان می دهیم که با استفاده از روش های غیر خطی می توان تعداد نمونه های لازم برای بازسازی در حالت بدون نویز را تا  $2k-1$  پایین آورد که بسیار پایین تر از نرخ لازم در روش های خطی ذکر شده است. همچنین، نحوه بازسازی با پیچیدگی بسیار کمتری صورت می گیرد و تضمین بازسازی سیگنال اولیه به صورت قطعی است و نه به صورت احتمالاتی. در مقابل، روش های غیر خطی نسبت به نویز جمعی پایداری کمتری دارند و همچنین پیچیدگی نمونه برداری را افزایش می دهند.

فرض کنید  $x_{n \times 1}$  یک بردار  $k$ -تنک باشد. می خواهیم با نمونه برداری غیر خطی از  $x_{n \times 1}$  با تعداد نمونه کم  $(2k-1)$  آن را بازسازی کنیم (نتایج را می توان به حالتی که حوزه تنک بودن  $\Psi$  مطرح است نیز تعمیم داد). فرض کنید  $a_1, \dots, a_n$  اعداد حقیقی دلخواه باشند؛ نمونه های غیر خطی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} y_1 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \\ y_2 &= a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 \\ &\vdots \\ y_{2k-1} &= a_1 x_1^{2k-1} + a_2 x_2^{2k-1} + \dots + a_n x_n^{2k-1} \end{cases} \quad (20-5)$$

(با وجود شباهت ظاهری به کدینگ RS<sup>۱</sup> و یا ماتریس های واندرموند، دقت کنید که خود مجهولات به توان می رسند و نه ضرایب؛ بنابراین، نمونه برداری غیر خطی است). نشان می دهیم که هر حالت  $k$ -تنک در بین بردارهای  $x_{n \times 1}$  را می توان از روی نمونه های  $\{y_1, \dots, y_{2k-1}\}$  استخراج کرد. ابتدا دقت کنید که در روابط فوق حداکثر  $k$  تا از جمله های  $x_i$  ناصفر هستند، مثلاً  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ . بنابراین دنباله  $\{y_i\}_{i=0}^{2k-1}$  در یک رابطه

<sup>۱</sup>Reed-Solomon

بازگشتی  $^2$  خطی و همگن از مرتبه  $k$  صدق می کند:

$$\exists c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R} : y_i + \sum_{j=1}^k c_j y_{i-j} = 0 \quad (k \leq i \leq 2k-1) \quad (21-5)$$

در واقع  $x_i$  های ناصفر، قطب های تبدیل  $\mathcal{Z}$  دنباله  $y_i$  خواهند بود (اگر دنباله را بطور نامتناهی می ساختیم). برای یافتن  $x_{i_j}$  ها، اولین گام، یافتن ضرایب دنباله بازگشتی  $y_i$  است ( $c_i$  ها). برای این منظور از  $k$ -معادله و  $k$ -مجهول

زیر استفاده می کنیم (مقدار  $y_0 = \sum_{i=1}^n a_i$  از قبل معلوم است):

$$\begin{bmatrix} y_{k-1} & y_{k-2} & \dots & y_0 \\ y_k & y_{k-1} & \dots & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{2k-2} & y_{2k-3} & \dots & y_{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_k \\ -y_{k+1} \\ \vdots \\ -y_{2k-1} \end{bmatrix} \quad (22-5)$$

بنابراین با حل دستگاه فوق، ضرایب  $c_i$  بدست می آیند (حالتی که این دستگاه تکین باشد، در ادامه مورد بحث قرار خواهد گرفت). اکنون همانطور که گفته شد، مقادیر ناصفر بردار  $\mathbf{x}_{n \times 1}$  ( $x_{i_j}$  ها) ریشه چندجمله ای با ضرایب  $c_i$  هستند:

$$q(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + c_2 z^{k-2} + \dots + c_k$$

$$\Rightarrow q(x_{i_1}) = q(x_{i_2}) = \dots = q(x_{i_k}) = 0 \quad (23-5)$$

بنابراین با بدست آوردن ریشه های چندجمله ای  $q(z)$  (پس از بدست آمدن  $c_i$  ها) مقادیر ناصفر بردار  $\mathbf{x}_{n \times 1}$  حاصل می شوند (روش فوق شباهت زیادی به روش ELP در یافتن مکان های خطا در کدهای حقیقی [۷۱] و یافتن زمان های ناپیوستگی به کمک Annihilating Filter در مبحث نمونه برداری از سیگنال های با نرخ نوآوری محدود دارد [۹۳]). دقت کنید که در این روش، ابتدا مقادیر ناصفر بردار  $\mathbf{x}_{n \times 1}$  محاسبه می شوند و سپس در پی مکان این مقادیر در بردار  $\mathbf{x}_{n \times 1}$  خواهیم بود (در روش های رایج نمونه برداری فشرده، اول مکان ها تعیین می شوند و بعد مقادیر).

پس از بدست آوردن قطب های تبدیل  $\mathcal{Z}$  دنباله  $y_i$  ( $x_{i_j}$  ها)، به راحتی می توان به کمک  $y_0, \dots, y_{k-1}$  که همانند شرایط اولیه برای دنباله بازگشتی است، ضریب ثابت هر قطب را هم بدست آورد ( $d_j$ ):

$$y_l = \sum_{j=1}^k d_j x_{i_j}^l, \quad 0 \leq l \leq 2k-1 \quad (24-5)$$



از طرفی این ضرایب ( $d_j$ ها) که از حل دنباله بازگشتی حاصل شده‌اند باید همان  $a_i$ های اولیه باشند که هنگام نمونه برداری انتخاب شده‌اند. پس، از تطابق  $d_j$ ها با  $a_i$ ها می‌توانیم تشخیص دهیم هر کدام از ریشه‌های بدست آمده مربوط به کدام مکان در بردار  $x_{n \times 1}$  بوده‌اند. برای جلوگیری از ابهام در این تطابق، باید  $a_i$ ها متمایز باشند (در صورت برابری  $a_i$  و  $a_j$ ، معلوم نیست که  $x_i$  ناصفر بوده است یا  $x_j$ ). بنابراین، در حالتی که دستگاه خطی مطرح شده تکین نباشد، جواب  $k$ -تنک به طور یکتا و قطعی بدست خواهد آمد.

اکنون حالتی مطرح می‌شود که دستگاه خطی تکین باشد:

$$\det \begin{bmatrix} y_{k-1} & y_{k-2} & \dots & y_0 \\ y_k & y_{k-1} & \dots & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{2k-2} & y_{2k-3} & \dots & y_{k-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (25-5)$$

این امر بدین معناست که  $\{y_i\}$ ها در دنباله بازگشتی کوچکتری (نسبت به طول مفروض  $k$ ) صدق می‌کنند. این اتفاق دو منشاء می‌تواند داشته باشد: اول این که تعداد مولفه‌های غیر صفر بردار  $x_{n \times 1}$  کمتر از  $k$  بوده و دیگری این که تعدادی از مولفه‌های غیر صفر با هم برابر بوده‌اند (در صورت برابری دو مقدار، ضرایب قطب‌ها با هم جمع می‌شوند و در نهایت به صورت یک قطب جلوه می‌کنند). مشابه قبل، ابتدا باید مقادیر ناصفر بدست آیند و سپس مکان‌ها و تکراری بودن و نبودن آن‌ها تعیین شود. در نتیجه، به یک دنباله بازگشتی مناسب نیاز است. برای این امر باید ابعاد دستگاه خطی را که از ابتدا  $k$  فرض شده بود، آنقدر کاهش دهیم تا به یک ماتریس غیر تکین دست یابیم:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} y_i & y_{i-1} & \dots & y_0 \\ y_{i+1} & y_i & \dots & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{2i} & y_{2i-2} & \dots & y_i \end{bmatrix}, \quad 0 \leq i \leq k-1 \quad (26-5)$$

به بیان بهتر، باید بزرگترین  $i$ ای را بیابیم که  $\det \mathbf{A}_i \neq 0$ . این  $i$  بیانگر تعداد مقادیر ناصفر متفاوت بین درایه‌های بردار  $x_{n \times 1}$  است. پس از بدست آمدن دنباله بازگشتی مرتبه  $i$  و متعاقباً مقادیر ناصفر بردار  $x_{n \times 1}$  به کمک  $y_0, \dots, y_i$  (شرایط اولیه دنباله بازگشتی)، ضرایب قطب‌ها ( $d_j$ ها) حاصل می‌شوند. مشابهاً، هر  $d_j$  برابر با یک یا زیرجمعی از  $a_j$ هاست (هنگامی که چند درایه‌ی ناصفر از  $x_{n \times 1}$  برابر باشند، ضرایب  $a_j$  آن‌ها با هم جمع می‌شود تا  $d_j$  نهایی حاصل شود). اکنون برای تشخیص بدون ابهام مکان‌ها و تکرارها، باید  $a_j$ ها به گونه‌ای باشند که هیچ دو زیرجمعی از آن‌ها برابر نشود. عکس این مطلب نیز صادق است؛ اگر هیچ دو زیرجمعی از  $a_j$ ها با

یکدیگر برابر نباشند، بطور یکتا می توان از روی  $d_j$  مکانها و تکرارهای اولیه را تعیین کرد. یک انتخاب ساده برای  $a_j$ ها، توانهای ۲ است:

$$1 \leq j \leq n: a_j = 2^j \quad (27-5)$$

پس با انتخاب مناسب  $a_j$ ها، تمام بردارهای  $k$ -تنک اولیه به طور یقینی (در حالت بدون نویز) قابل بازسازی هستند.

اگر  $f$  تابعی یک به یک با  $f(0) = 0$  باشد، در نمونه های غیرخطی تولید شده در (۵-۲۰) می توان به جای  $x_i$  از  $f(x_i)$  استفاده کرد. در این صورت در روند بازسازی نیز به جای  $x_i$   $f(x_i)$  به دست می آید و از آنجا که  $f$  یک به یک است، می توان به  $x_i$  دست پیدا کرد. شرط  $f(0) = 0$  از این رو اهمیت دارد که تنک بودن بردار  $[x_1, \dots, x_n]$  کماکان در  $[f(x_1), \dots, f(x_n)]$  صادق است و بنابراین نتایج به دست آمده هنوز معتبر هستند. استفاده از تابع  $f$  در محدود کردن دامنه تغییرات نمونه ها بسیار موثر است. فرض کنید دامنه تغییرات هر  $x_i$  بین  $[-2, 2]$  باشد و بردار  $[x_1, \dots, x_n]$  شامل  $k$  درایه ناصفر باشد، در روش نمونه برداری غیرخطی توان های این مقادیر تا مرتبه  $2k - 1$  باید محاسبه شوند که محدوده تغییرات را به  $[2^{2k-1}, -2^{2k-1}]$  افزایش می دهد. اکنون اگر تابع  $f(x) = e^{\frac{j\pi}{2}x}$  مورد استفاده قرار گیرد، محدوده تغییرات  $f^i(x)$  برای هر  $i$  ثابت است. از طرفی این تابع برای محدوده مورد نظر  $x_i$  یک به یک است. پس با استفاده از تابع  $f$  مناسب می توان مشکل محدوده تغییرات را حل کرد. به عنوان یک مثال غیرخطی با نمونه های حقیقی، نمونه های زیر را در نظر بگیرید (تغییرات  $x_i$  محدود به  $[-M, M]$  است):

$$\begin{cases} y_1 &= a_1 \sin\left(\frac{\pi x_1}{\sqrt{M}}\right) + a_2 \sin\left(\frac{\pi x_2}{\sqrt{M}}\right) + \dots + a_n \sin\left(\frac{\pi x_n}{\sqrt{M}}\right) \\ y_2 &= a_1 \sin\left(2\frac{\pi x_1}{\sqrt{M}}\right) + a_2 \sin\left(2\frac{\pi x_2}{\sqrt{M}}\right) + \dots + a_n \sin\left(2\frac{\pi x_n}{\sqrt{M}}\right) \\ &\vdots \\ y_{2k-1} &= a_1 \sin\left((2k-1)\frac{\pi x_1}{\sqrt{M}}\right) + a_2 \sin\left((2k-1)\frac{\pi x_2}{\sqrt{M}}\right) + \dots + a_n \sin\left((2k-1)\frac{\pi x_n}{\sqrt{M}}\right) \end{cases} \quad (28-5)$$

از آنجا که  $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ ، هر تابع سینوسی در نمونه های فوق را می توان به دو تابع نمایی مختلط تجزیه کرد، این موضوع نشان می دهد که دنباله  $\{y_l\}_{l=1}^{\infty}$  در یک رابطه بازگشتی مرتبه  $2k$  صدق می کند و در نتیجه اگر روشی مشابه قبل استفاده شود، به  $4k - 1$  نمونه احتیاج است. نشان می دهیم در این حالت با  $2k$  نمونه می توان بردار  $k$ -تنک را بازیابی کرد. با تعریف چند جمله ای  $q(z)$  به صورت قبل داریم:

$$\forall 1 \leq l \leq k: q(z) = \sum_{i=0}^{2k} c_i z^i = \prod_{l=1}^k (z - e^{j\frac{\pi x_{il}}{\sqrt{M}}})(z - e^{-j\frac{\pi x_{il}}{\sqrt{M}}}) = \prod_{l=1}^k (z^2 - 2z \cos\frac{\pi x_{il}}{\sqrt{M}} + 1) \quad (29-5)$$

در نتیجه  $c_0 = c_{2k} = 1$  و  $q(z)$  یک چندجمله‌ای متقارن است:

$$c_i = c_{2k-i} \quad (30-5)$$

پس

$$\forall l: 0 = \sum_{i=0}^{2k} c_i y_{l-i} = c_k y_{l-k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i (y_{l-i} + y_{l-2k+i}) \quad (31-5)$$

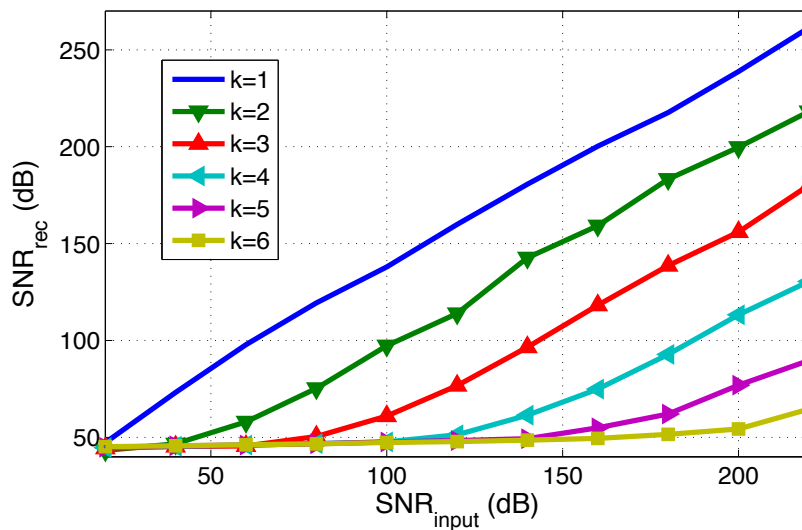
پس برای به دست آوردن  $c_i$  ها می‌توانیم از حل دستگاه زیر بهره جوییم:

$$\begin{bmatrix} y_k + y_{2-k} & y_{k-1} + y_{3-k} & \dots & y_2 + y_0 & y_1 \\ y_{k+1} + y_{3-k} & y_k + y_{4-k} & \dots & y_3 + y_1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{2k-1} + y_1 & y_{2k-2} + y_2 & \dots & y_{k+1} + y_{k-1} & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(y_{k+1} + y_{1-k}) \\ -(y_{k+2} + y_{2-k}) \\ \vdots \\ -(y_{2k} + y_0) \end{bmatrix} \quad (32-5)$$

در اینجا نیز  $y_0 = 0$  از پیش معلوم است و همچنین با توجه به تعریف نمونه‌ها داریم  $y_{-l} = -y_l$ ؛ در نتیجه با داشتن  $y_1, \dots, y_{k-1}$ ، مقادیر  $y_{-1}, \dots, y_{1-k}$  معلوم خواهند بود. پس برای حل دستگاه (32-5) تنها  $2k$  نمونه از  $y_i$  ها لازم است. با به دست آمدن ضرایب  $c_1, \dots, c_k$ ، مشابه قبل چندجمله‌ای  $q(z)$  را تشکیل می‌دهیم و پس از به دست آوردن ریشه‌های آن، مقادیر ناصفر بردار  $[x_1, \dots, x_n]$  را آشکار می‌کنیم و با کمک ضرایب  $a_i$  و دنباله بازگشتی  $\{y_l\}_l$ ، مکان این مقادیر نیز مشخص می‌شوند.

اهمیت  $k$ -تنک بودن بردار  $x$  در نمونه برداری غیرخطی بررسی شده تنها در وجود  $k$  مقدار غیرصفر مختلف در بین مقادیر بردار است؛ به عبارت بهتر، نکته اصلی تعداد مقادیر ناصفر نیست، بلکه تنوع در مقادیر ناصفر است. اگر تمامی مقادیر بردار  $x$  ناصفر باشند اما تنها  $k$  مقدار مختلف در بین درایه‌های آن یافت شود، دنباله  $\{y_l\}_l$  همچنان در یک دنباله بازگشتی درجه  $k$  صدق خواهد کرد و مطابق مطالب بیان شده، این مقادیر و مکان‌های آن‌ها (در صورت مناسب انتخاب شدن ضرایب  $a_i$ ) از روی نمونه‌ها قابل محاسبه‌اند. بنابراین، نمونه برداری غیرخطی نه تنها تعداد نمونه لازم و پیچیدگی محاسباتی عمل بازسازی را کاهش می‌دهد، بلکه بازسازی کامل را برای مجموعه بردارهای  $k$ -سطحی که تعمیمی از بردارهای  $k$ -تنک هستند تضمین می‌کند.

همان‌طور که در ابتدا ذکر شد، در خصوص نویز، به دلیل استفاده از عملگرهای غیرخطی، تحلیل عملکرد بسیار پیچیده است؛ البته در نویزهای کم، افت چندانی مشاهده نمی‌شود و در مورد عملکرد، می‌توان انتظار مشابهی نسبت به Annihilating Filter [۹۳] داشت.



شکل ۵-۱: کیفیت سیگنال بازسازی شده توسط نمونه‌های غیرخطی برای مرتبه‌های متفاوت تنک بودن.

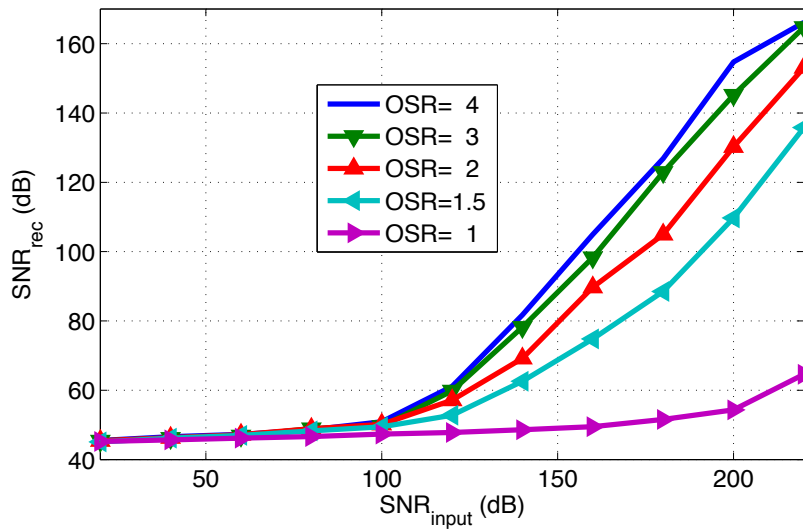
## ۴-۵ نتایج شبیه‌سازی

عملکرد نمونه برداری غیرخطی را با روش تابع سینوسی که مشکل محدوده تغییرات ندارد، بررسی می‌کنیم. برای این منظور بردارهای  $k$ -تنک با طول  $n = 50$  در نظر گرفته‌ایم که مکان‌های ناصفر به صورت تصادفی و هم‌احتمال از بین  $(\omega_k^0)$  حالت مختلف انتخاب می‌شوند. همچنین مقادیر غیرصفر با توزیع یکنواخت در  $[-2, 2]$  اختیار می‌شوند. از آنجا که احتمال برابری دو مقدار ناصفر در بردار بسیار ناچیز است، نیازی به انتخاب  $a_i = 2^i$  نیست و برای این منظور از  $a_i$ ‌های تصادفی با توزیع گوسی و میانگین صفر استفاده کرده‌ایم. برای بررسی اثر نویز، نمونه‌های غیرخطی تحت تاثیر نویز جمعی گوسی با واریانس‌های مشخص قرار گرفته‌اند تا SNR‌های متفاوتی ایجاد شود.

شکل ۵-۱ کیفیت سیگنال بازسازی شده (SNR) را بر حسب SNR ورودی برای  $k = 1, \dots, 6$  نشان می‌دهد. برای به دست آوردن این نمودار، برای هر  $k$ ، از  $2k$  نمونه استفاده شده است و نتایج برای ۵۰۰ شبیه‌سازی متفاوت میانگین‌گیری شده‌اند. شکل ۵-۱ نشان می‌دهد که با افزایش  $k$ ، حساسیت نسبت به نویز افزایش می‌یابد و افت کیفیت مشهودتر می‌شود.

هنگامی که بیشتر از  $2k$  نمونه از  $y_i$ ها در دسترس باشد، معادله (۵-۳۲) تبدیل به یک دستگاه فرا-معین<sup>۳</sup>

<sup>۳</sup>Over-determined



شکل ۵-۲: کیفیت سیگنال بازسازی شده توسط نمونه‌های غیرخطی به ازای  $k = 6$  در OSRهای متفاوت.

می‌شود و در نتیجه تاثیر نویز ورودی کاهش می‌یابد. در شکل ۵-۲ این اثر را برای  $k = 6$  بررسی کرده‌ایم. در این شکل منظور از OSR نسبت تعداد نمونه در دسترس به حداقل مورد نیاز ( $2k$ ) است. مثلاً، OSR= ۱/۵ به معنای استفاده از  $3k$  نمونه است.