

کاهش رتبه در ماتریس‌ها به کمک عملگرهای المانی

۱-۷ مقدمه

یکی از مسائل مهم در مورد سیگنال‌های واقعی، درجه آزادی موجود در آنهاست. در مبحث کاهش بعد^۱ تمرکز اصلی بر روی یافتن تعداد متغیرهای مستقل در ساختار یک گروه از سیگنال‌هاست که به فشردگی اطلاعات منجر می‌شود. یافتن بعد ذاتی در بسیاری در زمینه‌ها همچون یادگیری ماشین^۲ [۶۱]، بینایی ماشین^۳ [۹۲]، شبکه حسگرها^۴ [۷۶]، کاهش پهنای باند^۵ [۷۲] و فشردگی اطلاعات^۶ [۲۰] اهمیت بسزایی دارد. دلیل اصلی کاهش بعد، نمایش فشردگی داده بدون از دست دادن اطلاعات است. ساده‌سازی در ساختار، ما را قادر به استفاده از الگوریتم‌های طراحی شده برای بعد پایین (که نسبتاً سریع هستند) در مورد سیگنال‌های با بعد بالا می‌سازد. یکی از روش‌های رایج در نمایش داده‌ها، استفاده از ماتریس است. فرض کنید B به نوعی بیانگر اطلاعات اصلی باشد؛ در مبحث کاهش بعد به دنبال یافتن ماتریس A ای با مرتبه کم هستیم که به بهترین نحو ماتریس B را تقریب بزنند. در حقیقت، رتبه یک ماتریس بیانگر درجه آزادی آن است. یکی از نتایج معروف در این زمینه آن است که بهترین تقریب رتبه k از دیدگاه اندازه فروبنیوسی^۷ برای ماتریس B ، از نگه داشتن بزرگترین k مقدار

^۱ Dimensionality Reduction

^۲ Machine Learning

^۳ Computer Vision

^۴ Sensor Networks

^۵ Bandwidth Reduction

^۶ Data Compression

^۷ Frobenius Norm

تکین^۸ ماتریس و صفر کردن بقیه مقادیر تکین در تجزیه SVD (\mathbf{b}_k) بدست می‌آید. به عبارت بهتر، می‌توان نشان داد برای هر ماتریس \mathbf{M} با مرتبه k داریم:

$$|\mathbf{B} - \mathbf{B}_k|_F \leq |\mathbf{M} - \mathbf{B}|_F$$

که در آن $|\cdot|_F$ بیانگر اندازه فروبنیوسی است. این روش موفقیت چشم‌گیری در زمینه‌هایی همچون بازیابی اطلاعات^۹ [۱۳]، تشخیص چهره^{۱۰} [۹۲] و تکمیل ماتریس^{۱۱} [۶۴، ۲۱] که در آن‌ها ماتریس \mathbf{B} تقریباً کم مرتبه است، بدست آورده است. در این فصل، کاهش بعد از دیدگاه پردازش سیگنال مورد بررسی قرار می‌گیرد که در مباحثی همچون شبکه حسگرهای بی‌سیم و توموگرافی فراصوتی، کاربرد دارد. در این موارد، سیستم شامل چندین گره ارتباطی است به گونه‌ای که کانال ارتباطی باعث اعوجاج بر روی پیام‌های ارسالی می‌شود. در بسیاری از مواقع اگر پیام‌های ارسالی بین زوج مرتب‌های گیره را به صورت ماتریس \mathbf{A} نمایش دهیم، ماتریس بدست آمده رتبه پایینی دارد اما به دلیل اعوجاج تولید شده توسط کانال ارتباطی، ماتریس حاصل از سیگنال‌های دریافتی (\mathbf{B}) دچار افزایش رتبه شده است. نکته قابل توجه در این است که اعوجاج صورت گرفته توسط کانال بر روی تمام درایه‌های ماتریس یکسان است. بطور مثال اگر تاثیر کانال معادل با جذر گرفتن باشد، تمام سیگنال‌های دریافتی بطور یکسان تحت تاثیر عملگر جذر قرار می‌گیرند. از این رو، با وجود آن که تعداد پارامترهای مستقل در تولید ماتریس \mathbf{B} به همان اندازه ماتریس \mathbf{A} است، به دلیل اعوجاج غیرخطی کانال، رتبه \mathbf{B} نمی‌تواند به درستی بیانگر این درجه آزادی باشد. حال آن‌که اگر بتوان عکس اعوجاج ایجاد شده توسط کانال را بر روی درایه‌ها عمل کرد، مجدداً به ماتریس مرتبه کم \mathbf{A} با نمایش صحیح درجه آزادی می‌رسیم. در ادامه به طور مختصر به شرح دو مثال ذکر شده، یعنی توموگرافی فراصوتی و شبکه‌ی حسگرها می‌پردازیم.

کالیبره کردن در توموگرافی فراصوتی

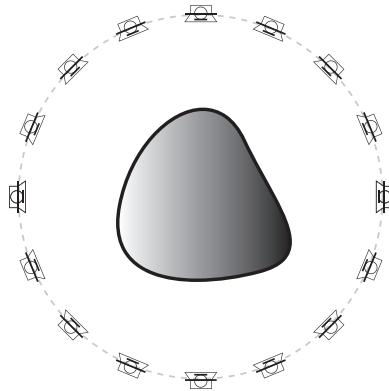
در توموگرافی فراصوتی، مجموعه حسگرها معمولاً بر روی یک حلقه محیط بر جسم نامعلوم قرار دارند که هریک از این حسگرها می‌تواند در نقش گیرنده یا فرستنده عمل کند. در هر لحظه، تنها یکی از حسگرها به عنوان فرستنده، سیگنالی ارسال می‌کند که پس از برخورد با جسم نامعلوم توسط مابقی حسگرها ضبط می‌شود.

^۸Singular Value

^۹Information Retrieval

^{۱۰}Face Recognition

^{۱۱}Matrix Completion



شکل ۷-۱: آرایش دایروی حسگرها در توموگرافی فراصوتی

این عمل به طور مرتب و چرخشی توسط تمامی حسگرها صورت می‌گیرد و در نهایت براساس تمام بازتاب‌های دریافتی، خواصی از قبیل شکل و ضریب سختی جسم نامعلوم بدست می‌آید. ساختار دو بعدی فوق را می‌توان به طور مشابهی به سه بعد تعمیم داد. شکل ۷-۱ ساختار دو بعدی را نشان می‌دهد.

برای پردازش بازتاب‌های بدست آمده، ابتدا لازم است که فاصله دقیق میان هر دو زوج حسگرها محاسبه شود. برای این منظور، عملیات ارسال و دریافت ابتدا بدون قراردادن جسم در داخل محفظه انجام می‌شود تا تاخیرهای زمانی میان هر ارسال و دریافت به صورت t_{ij} بدست آید. ماتریس $\mathbf{T} = [t_{ij}]$ بیانگر کلیه تاخیرها و در نتیجه فواصل میان زوج حسگرهاست. در حالت کلی، ماتریس \mathbf{T} دارای رتبه کامل است اما در [۶۲] نشان داده شده است که مرتبه ماتریس $\tilde{\mathbf{T}} = [t_{i,j}]_{n \times n}$ حداکثر ۳ است. از آن‌جا که مشاهدات معمولاً همراه با نویز است، رتبه این ماتریس دقیقاً ۳ نخواهد بود و با پیدا کردن بهترین تقریب رتبه ۳ آن، نه تنها نویز کاهش می‌یابد بلکه نمایش فشرده‌تری از این ماتریس بدست می‌آید. این مثال، حالتی را نشان می‌دهد که در آن مرتبه ذاتی ۳ است و تاثیر اعوجاج کانال، معادل جذر گرفتن است. در نتیجه عملگر المانی لازم برای کاهش بعد، به توان ۲ رساندن است. پدیده مشابهی در تخمین زمان دریافت سیگنال‌های صوتی توسط یک آرایه از میکروفون‌ها رخ می‌دهد [۳۰].

مکان یابی حسگرها در شبکه حسگرهای بی‌سیم

در مخابرات رادیویی، توان سیگنال دریافتی به صورت تابعی از فاصله میان فرستنده و گیرنده افت می‌کند که به پدیده افت مسیر^{۱۲} شهرت دارد. در حالت کلی اگر فاصله فرستنده و گیرنده r باشد، توان دریافتی متناسب با $\frac{1}{r^\alpha}$ افت می‌کند که توان α بین ۲ (در فضای آزاد) تا ۶ (در فضای پرنعکاس) تغییر می‌کند [۷۹].

در مسأله‌ی مکان یابی حسگرها، n حسگر در فضای d بعدی پخش شده‌اند و هر حسگر فاصله‌ی خود از سایر حسگرها (احتمالاً حسگرهای مجاور) را اندازه می‌گیرد. در عمل، اندازه‌گیری فاصله براساس توان دریافتی صورت می‌پذیرد و فرض کنید $d_{i,j}$ بیانگر فاصله اقلیدسی میان حسگرهای i و j ، و $\mathbf{D} = [d_{i,j}]$ ماتریس فاصله باشد، همچنین فرض کنید $\mathbf{P} = [p_{i,j}]_{n \times n}$ ماتریس توان‌های دریافتی باشد که در آن $p_{i,j}$ توان دریافتی حسگر i از سیگنال ارسالی حسگر j است. واضح است که با داشتن \mathbf{D} و تعدادی حسگر مرجع، موقعیت تمامی حسگرها مشخص خواهد شد اما در عمل به جای ماتریس \mathbf{D} ، ماتریس \mathbf{P} در دست است. با وجود آن که \mathbf{P} در حالت کلی رتبه کامل دارد، به راحتی می‌توان نشان داد که ماتریس $\tilde{\mathbf{P}} = [p_{i,j}^{-\frac{1}{\alpha}}]_{n \times n}$ حداکثر رتبه d^α دارد. در نتیجه، تخمین ماتریس $\tilde{\mathbf{P}}$ و استفاده از خاصیت کم‌رتبه بودن آن، کمک بسزایی در مکان یابی حسگرها خواهد داشت [۶۲، ۴۲]. از آن‌جا که α یکی از خواص محیط محسوب می‌شود، معمولاً مقدار آن در دست نیست، در نتیجه این وضعیت با آن که بعد ذاتی مسئله d^α است، به دلیل اعمال یک عملگر المانی نامشخص، رتبه ماتریس کامل شده است.

در این فصل، به بررسی مسئله ذکر شده در حالت کلی می‌پردازیم که در آن یک ماتریس کم‌رتبه توسط یک عملگر المانی شبه چندجمله‌ای و نامعلوم به یک ماتریس مرتبه کامل تبدیل شده است و با در دست داشتن ماتریس رتبه کامل، به دنبال یافتن عملکرد اعمال شده و در نتیجه ماتریس کم‌رتبه هستیم [۲]. در ادامه، پس از معرفی تعدادی نماد، مسئله را به طور دقیق و در قالب روابط ریاضی بیان می‌کنیم. سپس مسئله را در دو حالت توان صحیح و توان حقیقی، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۷-۲ نمادها و شرح مسأله

در این فصل از نماد \odot برای بیان عملگر المانی بر روی درایه‌های یک ماتریس استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال اگر $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{m \times n}$ ، در این صورت $\mathbf{A}^{\odot 2} = [a_{i,j}^2]_{m \times n}$ و $\odot f(\mathbf{A}) = [f(a_{i,j})]_{m \times n}$ ماتریس رتبه‌ناقص و رتبه آن

به ترتیب با \mathbf{A} و k نمایش داده می‌شود و اگر $\mathbf{B} = \odot f(\mathbf{A})$ ، عملگر اعوجاجی رابط بین \mathbf{A} و \mathbf{B} نامیده می‌شود. همچنین وارون f در صورت وجود، عملگر کاهنده رتبه تلقی می‌شود. به علاوه نمونه نویری شده \mathbf{B} را با $\tilde{\mathbf{B}}$ نشان می‌دهیم. به دلیل استفاده مکرر از درمیانان دسته‌ای از ماتریس‌ها، نمادهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$T_{\mathbf{B}}(x) = \det(\mathbf{B}^{\odot x}) \quad (1-7)$$

$$\tilde{T}_{\mathbf{B}}(q_1, \dots, q_n) = \det\left([\ln b_{i,j}]^{q_i}\right) \quad (2-7)$$

شرح مسئله: فرض کنید $f(x) = x^p$ عملگر اعوجاجی باشد که در آن $p > 0$ نامشخص است. همچنین فرض کنید \mathbf{A} ماتریس رتبه‌ناقص باشد و $\mathbf{B} = \odot f(\mathbf{A})$. اکنون هدف تخمین عملگر f و در نتیجه ماتریس رتبه‌ناقص \mathbf{A} با در دست داشتن \mathbf{B} و یا نمونه‌ی نویری آن ($\tilde{\mathbf{B}}$) است.

۳-۷ توان صحیح

قضیه زیر اثر یک عملگر اعوجاجی از نوع چندجمله‌ای بر روی یک ماتریس رتبه‌ناقص را نشان می‌دهد.

قضیه ۱-۷ فرض کنید رتبه ماتریس $\mathbf{A}_{n \times n}$ ، k باشد و p یک عدد طبیعی دلخواه باشد. در این صورت داریم:

$$\text{rank}(\mathbf{A}^{\odot p}) \leq \min \left\{ n, \binom{k+p-1}{p} \right\} \quad (3-7)$$

اثبات: از آن‌جا که $\text{rank}(\mathbf{A}) = k$ ، می‌توانیم k سطر مستقل خطی $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^k$ را از بین سطرهای \mathbf{A} انتخاب

کنیم. در نتیجه، تمام سطرهای \mathbf{A} را می‌توان بر حسب ترکیب خطی این سطرها نمایش داد:

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \dots & c_{n,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{n \times k}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_{k \times n}} = \left[\sum_{l=1}^k c_{i,l} v_{l,j} \right] \quad (4-7)$$

از این رو داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\odot p} &= \left[\left(\sum_{l=1}^k c_{i,l} v_{l,j} \right)^p \right] = \left[\sum_{p_1 + \dots + p_k = p} \binom{p}{p_1, \dots, p_k} \prod_{l=1}^k (c_{i,l} v_{l,j})^{p_l} \right] \\ &= \sum_{p_1 + \dots + p_k = p} \binom{p}{p_1, \dots, p_k} \left[\prod_{l=1}^k (c_{i,l} v_{l,j})^{p_l} \right] \end{aligned} \quad (5-7)$$

که در آن $[\prod_{l=1}^k (c_{i,l} v_{l,j})^{p_l}]$ نمایش دهنده یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌ی i, j به صورت $\prod_{l=1}^k (c_{i,l} v_{l,j})^{p_l}$ است.

پس:

$$\text{rank}(\mathbf{A}^{\odot p}) \leq \sum_{p_1 + \dots + p_k = p} \text{rank} \left(\left[\prod_{l=1}^k (c_{i,l} v_{l,j})^{p_l} \right] \right) \quad (6-7)$$

دقت کنید که :

$$\left[\prod_{l=1}^k (c_{i,l} v_{l,j})^{p_l} \right] = \begin{bmatrix} \prod_{l=1}^k c_{1,l}^{p_l} \\ \vdots \\ \prod_{l=1}^k c_{n,l}^{p_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \prod_{l=1}^k v_{l,1}^{p_l} & \dots & \prod_{l=1}^k v_{l,n}^{p_l} \end{bmatrix} \quad (7-7)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\text{rank} \left(\left[\prod_{l=1}^k (c_{i,l} v_{l,j})^{p_l} \right] \right) = 1 \quad (8-7)$$

با ادغام این رابطه و رابطه‌ی (۶-۷)، بدست می‌آوریم:

$$\text{rank}(\mathbf{A}^{\odot p}) \leq \sum_{p_1 + \dots + p_k = p} 1 = \binom{k+p-1}{p} \quad (9-7)$$

که اثبات را کامل می‌کند. ■

نکته ۳ اگر \mathbf{A} یک ماتریس چرخشی باشد به طوری که تبدیل DFT سطر اول تنها k درایه ناصفر و متوالی داشته

باشد، در این صورت :

$$\text{rank}(\mathbf{A}^{\odot p}) \leq p(k-1) + 1 \quad (10-7)$$

دلیل این امر آن است که ضرب در حوزه زمان معادل با کانولوشن در حوزه فرکانس است و مشابهاً به توان p رساندن در حوزه زمان معادل با p مرتبه کانولوشن در حوزه فرکانس است. علاوه بر این، می‌دانیم که ماتریس‌های چرخشی را می‌توان به کمک ماتریس‌های DFT و $IDFT$ به صورت قطری تجزیه کرد که در آن عناصر روی قطر، ضرایب DFT سطر اول هستند.

نکته ۴ عملگر اعوجاجی در نظر گرفته شده در قضیه ۷-۱، حالت خاصی از عملکرد چندجمله‌ای است که در

حالت کلی به صورت $\mathbf{B} = \odot f(\mathbf{A})$ با شرط $f(x) = \sum_{i=0}^p f_i x^i$ بیان می‌شود. در حقیقت، $f(x)$ در قضیه ۷-۱،

یک جمله‌ای است. برای حالت کلی چندجمله‌ای داریم:

$$\odot f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^p f_i \mathbf{A}^{\odot i} \quad (11-7)$$

و در نتیجه:

$$\text{rank}(\odot f(\mathbf{A})) \leq \sum_{i=0}^p \text{rank}(\mathbf{A}^{\odot i}) \leq \sum_{i=0}^p \binom{k+i-1}{i} = \binom{k+p}{p} \quad (12-7)$$

نکته ۵ کران مذکور در قضیه ۷-۱ اغلب حاصل می‌شود. این نکته در آشکارسازی عملگرهای اعوجاجی چندجمله‌ای کارساز است. فرض کنید $f(x)$ چندجمله‌ای درجه p و $\mathbf{A}_{n \times n}$ ماتریسی با رتبه $k_{\mathbf{A}}$ باشد که در آن $k_{\mathbf{A}}$ نسبت به n بسیار کوچک است. همچنین، $\mathbf{B} = \odot f(\mathbf{A})$ ماتریس اعوجاج یافته با رتبه $k_{\mathbf{B}} \leq \binom{k_{\mathbf{A}}+p}{p}$ است. اگر \mathbf{B} یک ماتریس رتبه‌ناقص حالت کلی می‌بود، ماتریس $\mathbf{B}^{\odot i}$ ($i \in \mathbb{N}$) با احتمال زیاد، رتبه $\binom{k_{\mathbf{B}}+i-1}{i}$ می‌داشت اما از آنجا که \mathbf{B} خود از یک ماتریس رتبه‌ناقص \mathbf{A} حاصل شده است، $\mathbf{B}^{\odot i}$ توسط یک چندجمله‌ای از درجه pi به \mathbf{A} مربوط می‌شود. در نتیجه رتبه آن نمی‌تواند از $\binom{k_{\mathbf{A}}+pi}{pi}$ فراتر رود. به سادگی می‌توان بررسی نمود که این کران، کمتر از کران پیش‌بینی شده توسط حالت کلی نکته فوق است. از این رو به راحتی می‌توان \mathbf{B} را از یک ماتریس رتبه‌ناقص حالت کلی متمایز کرد. البته به شرطی که $k_{\mathbf{A}}$ به اندازه کافی از n کوچکتر باشد. در غیر این صورت $\mathbf{B}^{\odot i}$ و یا \mathbf{B} احتمالاً ماتریس‌های رتبه کامل هستند. علاوه بر این، روند تغییرات $\text{rank}(\mathbf{B}^{\odot i})$ نسبت به i در یافتن درجه چندجمله‌ای اعوجاجی نقش موثری دارد.

۴-۷ توان حقیقی

در این بخش، تمرکز بر روی حالت $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\odot p}$ است که در آن p . یک تابع معکوس‌پذیر فرض می‌شود (که بتوانیم ماتریس \mathbf{A} را بازیابی کنیم). به عنوان مثال، حالت $\mathbf{A}^{\odot \frac{1}{2}}$ را در نظر بگیرید؛ در صورتی که المان‌های \mathbf{A} حقیقی باشند هر دوی $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$. وارون‌پذیر و خوش‌تعریف هستند. برای ماتریس رتبه‌ناقص \mathbf{A} ، ماتریس $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\odot \frac{1}{2}}$ به جز حالت‌های خاص، رتبه کامل است. در این‌جا با مشاهده $\mathbf{B}_{n \times n}$ می‌خواهیم به وجود و یا عدم وجود ماتریس رتبه‌ناقص \mathbf{A} از پس \mathbf{B} پی ببریم و در صورت وجود، عملگر p . را تخمین بزنیم. دقت کنید که $\mathbf{B}^{\odot \frac{1}{p}}$ همان ماتریس رتبه‌ناقص اصلی است اما اگر x یک تقریب بسیار خوب از $\frac{1}{p}$ باشد، $\mathbf{B}^{\odot x}$ کماکان دارای رتبه کامل است. به بیان بهتر، حتی تقریب‌های بسیار خوب از $\frac{1}{p}$ ، رتبه را کاهش نمی‌دهند. این مشکل اساساً به دلیل گسسته بودن مقادیر رتبه است؛ برای غلبه بر این مشکل باید معیاری پیوسته برای رتبه یک ماتریس معرفی کنیم. برای این منظور از تابع $T_{\mathbf{B}}(x)$ که در (۷-۱) تعریف شده است استفاده می‌کنیم. واضح است که اگر \mathbf{B} شامل درایه ۰ نباشد، $\mathbf{B}^{\odot 0} = \mathbf{1}_{n \times n}$ است. در نتیجه، برای $n > 1$ همواره $T_{\mathbf{B}}(0) = 0$ همچنین اگر $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\odot p}$ که در آن

\mathbf{A} ماتریس رتبه‌ناقص است، $T_{\mathbf{B}}(\frac{1}{p}) = T_{\mathbf{A}}(1) = 0$. دقت کنید که $T_{\mathbf{B}}(x)$ تابعی پیوسته از x است و در نتیجه اگر x به اندازه کافی به $\frac{1}{p}$ نزدیک باشد، $T_{\mathbf{B}}(x)$ نیز به اندازه کافی به ۰ نزدیک خواهد بود. بنابراین ریشه‌های $T_{\mathbf{B}}(x)$ به غیر از حالت بدیهی $x = 0$ نقش کلیدی در آشکارسازی درجه آزادی به کار رفته در ساختار \mathbf{B} ایفا می‌کند. با این وجود یافتن ریشه‌های $T_{\mathbf{B}}(x)$ کار آسانی نیست. به منظور یافتن ریشه‌های $T_{\mathbf{B}}(x)$ از تقریب تابع ذکر شده توسط بسط تیلور آن استفاده می‌کنیم.

لم ۷-۱ تابع $T_{\mathbf{B}}(x)$ در هر نقطه بسط تیلور همگرا دارد و جمله q ام در بسط حول $x = 0$ عبارت است از

$$: (T_{\mathbf{B}}(x) = \sum_{q=0}^{\infty} t_q x^q)$$

$$t_q = \frac{\sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \left(\sum_{i=1}^n \ln b_{i, \pi(i)} \right)^q}{q!} \quad (13-7)$$

که در آن S_n بیانگر مجموعه تمام جایگشت‌های $\{1, \dots, n\}$ است (که تعداد آن‌ها برابر با $n!$ است) و برای هر $\pi \in S_n$ ، علامت π (که با $\text{sgn}(\pi)$ نمایش داده می‌شود) برابر با $(-1)^{N(\pi)}$ است که $N(\pi)$ کمترین تعداد جابه‌جایی‌های دو تایی لازم برای تبدیل جایگشت π به جایگشت همانی را نشان می‌دهد.

اثبات: برای بدست آوردن ضرایب سری تیلور، از بسط دترمینان به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{B}}(x) &= \det [b_{i,j}^x] = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n b_{i, \pi(i)}^x = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) e^{x \sum_{i=1}^n \ln b_{i, \pi(i)}} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln b_{i, \pi(i)} \right)^q}{q!} x^q = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{x^q}{q!} \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \left(\sum_{i=1}^n \ln b_{i, \pi(i)} \right)^q \quad (14-7) \end{aligned}$$

رابطه‌ی آخر، ضرایب سری تیلور را نشان می‌دهد. دقت کنید $\det(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)$ لزوماً برابر با $\det(\mathbf{M}_1) + \det(\mathbf{M}_2)$ نیست و لذا $\frac{\partial^q}{\partial x^q} T_{\mathbf{B}}(x)$ لزوماً برابر با $\det\left(\frac{\partial^q}{\partial x^q} \mathbf{B}^{\odot x}\right)$ نیست که اهمیت نحوه بدست آوردن رابطه (۷-۱۴) را نشان می‌دهد. همچنین به دلیل نمایش $T_{\mathbf{B}}(x)$ به صورت جمع، تعداد متناهی جمله نمایی، سری تیلور مذکور رد تمامی نقاط همگراست. ■

با وجود آن که لم ۷-۱ ضرایب سری تیلور $T_{\mathbf{B}}(x)$ را بیان می‌کند، نمایش مفید دیگری از سری تیلور وجود دارد که در ادامه آن برای بدست آوردن یک کران بر روی خطای حاصل از تقریب $T_{\mathbf{B}}(x)$ توسط متناهی جمله از سری تیلور آن، استفاده می‌کنیم.

قضیه ۷-۲: جمله اول سری تیلور $T_{\mathbf{B}}(x)$ همگی صفر هستند و داریم:

$$T_{\mathbf{B}}(x) = \sum_{q=n-1}^{\infty} \frac{x^q}{q!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n=q \\ q_i \in \mathbb{Z}^+}} \binom{q}{q_1, \dots, q_n} \times \bar{T}_{\mathbf{B}}(q_1, \dots, q_n) \quad (15-7)$$

که $\bar{T}_{\mathbf{B}}$ پیش از این در رابطه (۷-۲) تعریف شده است.

اثبات: برای یک جایگشت $\pi \in S_n$ می‌دانیم:

$$\left(\sum_{i=1}^n \ln b_{i, \pi(i)} \right)^q = \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n=q \\ q_i \in \mathbb{Z}^+}} \binom{q}{q_1, \dots, q_n} \prod_{i=1}^n (\ln b_{i, \pi(i)})^{q_i} \quad (16-7)$$

اکنون با استفاده از لم ۷-۱ و تعریف (۷-۲) بدست می‌آوریم:

$$T_{\mathbf{B}}(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{x^q}{q!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n=q \\ q_i \in \mathbb{Z}^+}} \binom{q}{q_1, \dots, q_n} \times \bar{T}_{\mathbf{B}}(q_1, \dots, q_n) \quad (17-7)$$

اگر در n تایی (q_1, \dots, q_n) که q_i ها نامنفی‌اند و $\sum_{i=1}^n q_i = q$ حداقل دو صفر موجود باشد، $[(\ln b_{i,j})^{q_i}]$

حداقل دو سطر تمام یک دارد که نتیجه می‌دهد $\bar{T}_{\mathbf{B}}(q_1, \dots, q_n) = 0$. بنابراین n تایی‌هایی در بسط تیلور مذکور

در (۷-۱۷) تاثیرگذار هستند که حداکثر شامل یک صفر باشند. از این رو در بسط تیلور $T_{\mathbf{B}}(x)$ ضرایب جملات

x^q برای $q < n - 1$ صفر است که نشان می‌دهد $x = 0$ ریشه مکرر $T_{\mathbf{B}}$ با حداقل مرتبه $n - 1$ است. ■

با استناد به قضیه ۷-۲ و لم ۷-۱ برای هر بازه محدود و هر دقت دلخواه، می‌توان $T_{\mathbf{B}}$ را توسط متناهی

جمله از بسط تیلور آن تقریب زد. نتیجه می‌شود که این تقریب‌ها کلید اصلی برای محاسبه ریشه‌های $T_{\mathbf{B}}(x)$

هستند؛ سری تیلور را با n جمله تقریب می‌زنیم و سپس ریشه‌های چندجمله‌ای حاصل را بدست می‌آوریم.

سپس بررسی می‌کنیم که آیا تقریب n جمله‌ای بسط تیلور به تقریب مناسبی از ریشه بدست آمده منجر می‌شود یا

خیر. در صورت منفی بودن پاسخ، ریشه بدست آمده را نادیده می‌گیریم و تعداد جملات بسط تیلور را افزایش

می‌دهیم تا تعداد مناسبی ریشه بدست آوریم. در قضیه زیر یک کران بالایی برای خطای تقریب‌های متناهی جمله

از بسط تیلور ارائه می‌دهیم.

قضیه ۷-۳: فرض کنید $E_N(x) = \sum_{q=N+1}^{\infty} t_q x^q$ نمایشگر خطای تقریب بسط تیلور $T_{\mathbf{B}}(x)$ توسط $n + 1$

جمله‌ی اول آن باشد و $M_{\mathbf{B}}$ حداکثر اندازه درایه‌های ماتریس $\odot \ln \mathbf{B}$ را نمایش دهد. برای هر x دلخواه و

$N \geq \lceil eM_{\mathbf{B}}x \rceil$ داریم:

$$|E_N(x)| \leq \frac{n^{\frac{n}{\nu}} (eM_{\mathbf{B}}x)^{N+1}}{\sqrt{\nu}\pi(N+1)^{N+1/\nu-n} \left(1 - \frac{eM_{\mathbf{B}}x}{N+1}\right)} \quad (18-7)$$

اثبات: با استفاده از نامساوی هادامارد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |\bar{T}_{\mathbf{B}}(q_1, \dots, q_n)| &= \left| \det \left([(\ln b_{i,j})^{q_i}] \right) \right| \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |\ln b_{i,j}|^{\nu q_i} \right)^{1/\nu} \\ &\leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\nu} M_{\mathbf{B}}^{q_i} = n^{\frac{n}{\nu}} M_{\mathbf{B}}^{\sum_{i=1}^n q_i} \end{aligned} \quad (19-7)$$

دقت کنید:

$$\begin{aligned} |E_N(x)| &= \left| \sum_{q=N+1}^{\infty} \frac{x^q}{q!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n=q \\ q_i \in \mathbb{Z}^+}} \binom{q}{q_1, \dots, q_n} \times \bar{T}_{\mathbf{B}}(q_1, \dots, q_n) \right| \\ &\leq \sum_{q=N+1}^{\infty} \frac{x^q}{q!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n=q \\ q_i \in \mathbb{Z}^+}} \binom{q}{q_1, \dots, q_n} \times |\bar{T}_{\mathbf{B}}(q_1, \dots, q_n)|. \end{aligned} \quad (20-7)$$

در نتیجه با استفاده از (۱۹-۷) داریم:

$$\begin{aligned} |E_N(x)| &\leq \sum_{q=N+1}^{\infty} \frac{x^q}{q!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n=q \\ q_i \in \mathbb{Z}^+}} \binom{q}{q_1, \dots, q_n} n^{\frac{n}{\nu}} M_{\mathbf{B}}^q \\ &= n^{\frac{n}{\nu}} \sum_{q=N+1}^{\infty} \frac{(M_{\mathbf{B}}x)^q q^n}{q!} \end{aligned} \quad (21-7)$$

به کمک $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ می‌آوریم

$$\begin{aligned} |E_N(x)| &\leq \frac{n^{\frac{n}{\nu}} (eM_{\mathbf{B}}x)^{n-1/\nu}}{\sqrt{\nu}\pi} \sum_{q=N+1}^{\infty} \left(\frac{eM_{\mathbf{B}}x}{q}\right)^{q+1/\nu-n} \\ &\leq \frac{n^{\frac{n}{\nu}} (eM_{\mathbf{B}}x)^{n-1/\nu}}{\sqrt{\nu}\pi} \sum_{q=N+1}^{\infty} \left(\frac{eM_{\mathbf{B}}x}{N+1}\right)^{q+1/\nu-n} \end{aligned} \quad (22-7)$$

از آنجا که فرض کردیم $N \geq \lceil eM_{\mathbf{B}}x \rceil$ می‌دانیم $\frac{eM_{\mathbf{B}}x}{N+1} < 1$ و در نتیجه:

$$\sum_{q=N+1}^{\infty} \left(\frac{eM_{\mathbf{B}}x}{N+1}\right)^{q+1/\nu-n} = \left(\frac{eM_{\mathbf{B}}x}{N+1}\right)^{N+1/\nu-n} \frac{1}{1 - \frac{eM_{\mathbf{B}}x}{N+1}} \quad (23-7)$$

به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. ■

شایان ذکر است که با ضرب کردن و یا تقسیم کردن درایه‌های \mathbf{B} بر یک عدد ثابت، تغییری در ریشه‌های

$T_{\mathbf{B}}(x)$ ایجاد نمی‌شود. با این حال، $M_{\mathbf{B}}$ و در نتیجه کران بالایی بدست آمده برای خطا تغییر می‌کند.

آخرین مطلب قابل ذکر، رتبه ماتریس $\mathbf{A}_{n \times n}$ است که ماتریس $\mathbf{B}_{n \times n}$ از روی آن ساخته شده است. همان طور که قضیه ۷-۱ نشان می‌دهد، برای تمام مقادیر m که $\binom{m+k-1}{m} < n$ (فرض کنید m_{\max} بزرگترین مقدار برای چنین m هایی باشد) ماتریس $\mathbf{A}^{\odot m}$ کماکان رتبه‌ناقص است. بنابراین اگر $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\odot p}$ که p عددی حقیقی است، تمامی اعضای مجموعه $\left\{\frac{i}{p}\right\}_{i=0}^{m_{\max}}$ ریشه‌های $T_{\mathbf{B}}(x)$ خواهند بود. به بیان بهتر، مجموعه ریشه‌های $T_{\mathbf{B}}$ شامل تصاعدی حسابی به طول $m_{\max} + 1$ با جمله اولیه صفر و قدر نسبت $\frac{1}{p}$ است. در حقیقت، مشاهده این تصاعد حسابی، کلید اصلی در آشکارسازی ساختار رتبه‌ناقص استفاده شده و همچنین تخمین‌های نسبتاً دقیق از $\frac{1}{p}$ است. برای روشن شدن این موضوع، به این نکته دقت کنیم که با تقریب زدن بسط تیلور توسط متناهی جمله، ریشه‌ها به طور دقیق بدست نمی‌آیند و در نتیجه مشاهده یک الگو مانند تصاعد حسابی برای تخمین قدر نسبت، گره‌گشای کار است. همچنین طول تصاعد حسابی، تخمین جالبی از رتبه ماتریس \mathbf{A} (k) ارائه می‌دهد: اگر طول تصاعد l باشد داریم:

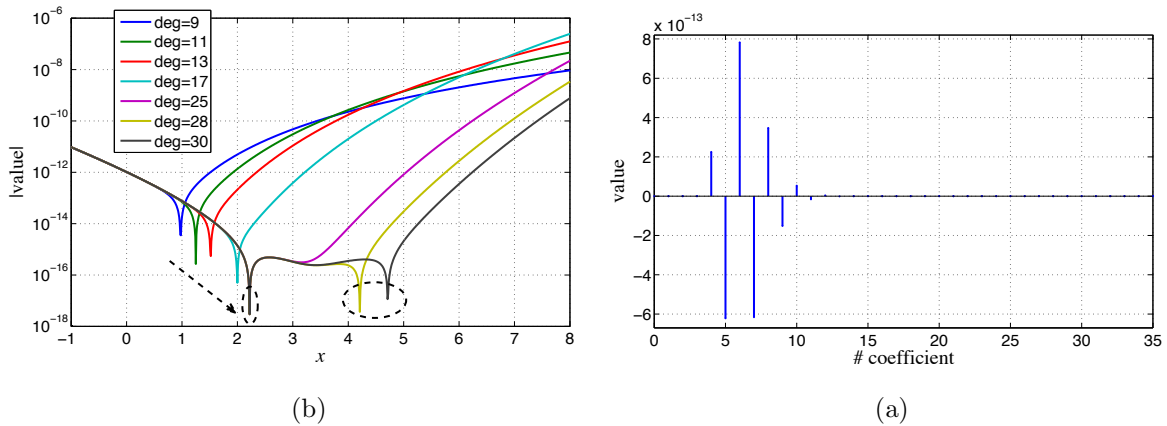
$$\binom{l+k-2}{l-1} < n \leq \binom{l+k-1}{l} \quad (24-7)$$

۵-۷ نتایج عددی

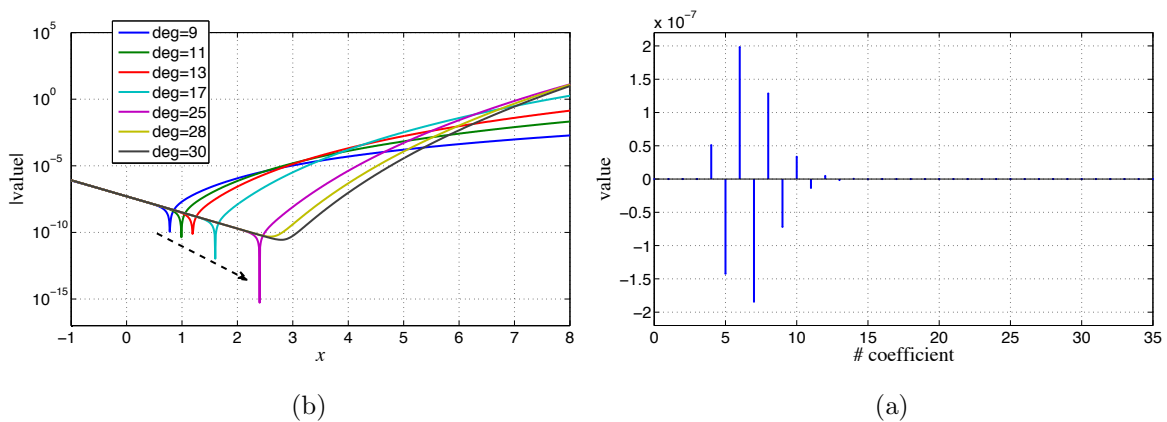
برای یک نمونه شبیه‌سازی، ماتریس زیر را به عنوان یک ماتریس رتبه‌ناقص در نظر بگیرید:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 13 & 8 & 7 & 12 \\ 3 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 8 \\ 5 & 12 & 8 & 7 & 13 \end{bmatrix} \quad (25-7)$$

می‌توان نشان داد که $rank(\mathbf{A}^{\odot i}) = i + 1$ برای $i = 1, 2, 3, 4$. مدل اعوجاج یافته \mathbf{A} را در این مثال $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\odot \frac{5}{11}}$ فرض می‌کنیم که به معنای $p = \frac{5}{11}$ و در نتیجه $\frac{1}{p} = \frac{11}{5} = 2.2$ است. برای واقعی‌تر شدن نتایج، المان‌های \mathbf{B} را با نویز سفیدگوسی جمع می‌کنیم تا ماتریس $\bar{\mathbf{B}}$ حاصل شود به نحوی که SNR آن نسبت به ماتریس \mathbf{B} برابر $100dB$ شود. شکل ۷-۲(a) ضرایب بسط تیلور $T_{\bar{\mathbf{B}}}(x)$ را نشان می‌دهند. همان طور که پیش‌بینی می‌شود، ضرایب فوق به سرعت میرا می‌شوند. در شکل ۷-۲(b) مقادیر چندجمله‌ای‌های حاصل از تقریب‌های متناهی جمله بسط تیلور، در یک بازه ثابت بر حسب تعداد جمله رسم شده‌اند. از آنجا که بسط تیلور فوق از جمله x^4 شروع می‌شود. برای سهولت در یافتن ریشه‌ها، تمامی جمله‌ها را بر x^4 تقسیم کرده‌ایم. همان‌طور که نتایج نشان



شکل ۷-۲: (a) ضرایب بسط تیلور $T_{\mathbf{B}}(x)$ و (b) مقادیر چندجمله‌ای‌های حاصل از در نظر گرفتن متناهی جمله بسط تیلور $T_{\mathbf{B}}(x)$ پس از حذف فاکتور x^4 هنگامی که نویز جمعی در حد $\text{SNR} = 100\text{dB}$ است.



شکل ۷-۳: (a) ضرایب بسط تیلور $T_{\mathbf{B}}(x)$ و (b) مقادیر چندجمله‌ای‌های حاصل از در نظر گرفتن متناهی جمله بسط تیلور $T_{\mathbf{B}}(x)$ پس از حذف فاکتور x^4 هنگامی که نویز جمعی در حد $\text{SNR} = 50\text{dB}$ است.

می‌دهند، ریشه چندجمله‌ای‌های با درجه کوچکتر و یا مساوی ۱۷ از بسط اولیه (درجه ۱۳ در بسط حاصل از تقسیم بر جمله x^4) با افزایش درجه به سمت مقدار مطلوب $2/2$ نزدیک می‌شود و هنگامی که درجه فراتر از ۲۵ رود، این ریشه با دقت مطلوبی بدست آمده و پایدار شده است (مقدار نهایی $2/2152$).

به علاوه، ریشه دوم که $4/4$ است، برای درجه‌های بزرگتر از ۲۹ شروع به ظهور می‌کند. روند مشابهی برای حالت $\text{SNR} = 50\text{dB}$ طی شده است که متعاقباً شکل‌های (a)-۳-۷ و (b)-۳-۷ حاصل شده‌اند. به طور مشابه، مشاهده می‌شود که ریشه چندجمله‌ای‌ها در درجه‌های پایین به سمت مقدار مطلوب $2/2$ نزدیک می‌شوند اما هنگامی که درجه از ۲۸ فراتر می‌رود، به دلیل حضور نویز، ریشه مختلط حاصل می‌شود اما کماکان در حوالی

نقطه ۲/۲ شاهد یک مینیمم موضعی هستیم.

در حالت $SNR = 100dB$ با استفاده از تخمین $\frac{1}{p}$ به صورت $2/2152$ از ماتریس $\tilde{\mathbf{B}}$ به تخمینی از ماتریس \mathbf{A} می‌رسیم که مقادیر تکین آن عبارتند از: $\{3/598, 0/201, 1/39e-5, 2/93e-7, 1/79e-9\}$. واضح است که سه مقدار تکین کوچکتر، در واقع صفر بوده‌اند که به دلیل وجود نویز و غیرایده‌آل بودن تخمین $\frac{1}{p}$ به این صورت ظاهر شده‌اند. مقادیر تکین ماتریس \mathbf{A} عبارت است از $\{3/6, 0/2, 0, 0, 0\}$.