

## جمع بندی و نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه به طور خاص به بررسی روش‌های غیرتصادفی نمونه‌برداری از سیگنال‌های تنک پرداختیم. در روش‌های خطی این عمل به کمک ماتریس حسگر صورت می‌گیرد. در این پایان‌نامه با چند روش مختلف، ساخت این ماتریس‌ها مورد بررسی قرار گرفت. به کمک کدهای متعامد نوری روش ساختی برای ماتریس‌های حسگر دودویی ارائه شد که از نظر ابعاد در حد ماتریس‌های معرفی شده توسط Devore است با این تفاوت که تنوع روش‌های ساخت بیشتر است. نامنفی بودن درایه‌های ماتریس، عامل بسیار محدودکننده‌ای در طراحی است؛ برای غلبه بر این مشکل به سراغ ماتریس‌های دو قطبی و مختلط رفتیم. به کمک کدهای BCH دودویی، ماتریس‌های دو قطبی  $(2^{l-j})^{\frac{\ln j}{j}} \times (2^l - 1)$  را معرفی کردیم که ضریب هم‌دوسی کمتر از  $2^{-j}$  ( $l > j$ ) دارند و در نتیجه شرط RIP از مرتبه  $k \leq 2^j + 1$  را ارضا می‌کنند. با کمک تعمیم‌های غیردودویی کدهای BCH این طرح به ماتریس‌های مختلط  $(p^{l-j})^{\frac{\ln j}{j}} \times (p^l - 1)$  با  $p$  اول تعمیم داده شد به طوری که درایه‌های ماتریس هم‌اندازه‌اند. در اکثر این ساختارها عملکرد ماتریس حسگر در حد ماتریس‌های تصادفی و گاهی بهتر مشاهده شده است؛ علاوه بر این، ساختار دوری ستون‌های این ماتریس‌ها که ناشی از گردشی بودن کدهای BCH است به طور موثری پیچیدگی محاسباتی در بازسازی بردار تنک از روی نمونه‌ها را کاهش می‌دهد. در ادامه، روش‌هایی برای ادغام این ماتریس‌ها و ایجاد تنوع بیشتر در ابعاد، معرفی کردیم؛ به کمک ادغام ماتریس‌ها توانستیم ماتریس‌هایی با ابعاد  $(r^{\frac{\ln(\log_2 p - \log_2 r)}{\log_2 p - \log_2 r}}) \times p^2 \times p^{r+1}$  ( $p$  توانی از یک عدد اول) بسازیم که تا کنون بهترین کران در ساختارهای غیرتصادفی به شمار می‌رود.

نمونه‌برداری غیرخطی برای اولین بار در این پایان‌نامه مورد بحث قرار گرفت. نشان دادیم هنگامی که

دسته سیگنال‌ها را به بردارهای تک تنک محدود کنیم، روش‌های غیرخطی وجود دارند که مستقل از حوزه تنک‌بودن سیگنال، علاوه بر فشردگی، اطلاعات موجود در سیگنال را حفظ می‌کنند. این در حالی است که روش‌های خطی قادر به چنین کاری نیستند. همچنین نشان دادیم که با استفاده از طرح‌های غیرخطی می‌توان به نرخ فشردگی بالاتر و در عین حال پیچیدگی محاسباتی کمتر در گیرنده دست یافت. البته همان‌طور که انتظار می‌رود این روش‌ها نسبت به نویز ناپایدارند و تنها در کاربردهایی که نویز جمعی وجود ندارد (مانند شبکه‌های داده و نوری) می‌توانند جایگزین مناسبی برای روش‌های خطی باشند.

از مفاهیم عمیق در مبحث نمونه‌برداری فشرده، تعاریف تنک‌بودن و فشرده‌پذیری است؛ تمام نتایج این مبحث بر پایه تنک‌بودن سیگنال‌های ورودی استوار است. با وجود آن که این مفاهیم در حالت گسسته و بعد متناهی تعاریف قابل قبولی دارند، در حالت بعد نامتناهی وضعیت کاملاً متفاوت است. در این پایان‌نامه نشان دادیم که این مفاهیم را چه برای سیگنال‌های یقینی و چه تصادفی، می‌توان به بعد نامتناهی تعمیم داد. تعاریف ارائه شده، بر مبنای رفتار حدی دنباله‌های منقطع شده استوار است و نتایج بعد متناهی را در بر می‌گیرد. همچنین به کمک دو قضیه، روشی برای متمایز کردن توزیع احتمال‌هایی که دنباله تصادفی و *i.i.d* فشرده‌پذیر تولید می‌کنند معرفی گردید.

در انتهای پایان‌نامه نیز یک مسأله تنک دو بعدی را بررسی کردیم. ماتریس‌ها، تعمیم‌هایی از بردارها به شمار می‌روند، حال آن که در تعمیم مباحث نمونه‌برداری فشرده به ماتریس‌ها، بر خلاف بردارها که تنک‌بودن بر اساس درایه‌ها تعریف می‌شود، تنک‌بودن بر اساس رتبه ماتریس بیان می‌شود. در این جا نشان دادیم که چگونه می‌توان یک ماتریس کم‌رتبه را که درایه‌هایش به طور یکسانی تحت تاثیر یک اعوجاج غیرخطی قرار گرفته‌اند (و در نتیجه ماتریس دیگر کم‌رتبه نیست) بازیابی کرد. از نتایج جالب توجه آن است که اگر رتبه ماتریس به اندازه کافی کوچک باشد و درایه‌ها به توان یک عدد صحیح و مثبت رسیده باشند، ماتریس حاصل کماکان رتبه‌ناقص است اما خواص متمایز کننده‌ای نسبت به یک ماتریس رتبه‌ناقص حالت کلی دارد. این حالت، تعمیمی از مسأله کاهش پهنای باند در سیگنال‌های یک بعدی است که رابطه تنگاتنگی با مبحث نمونه‌برداری فشرده دارد. در حالتی که توان عدد صحیح نباشد، ماتریس نهایی به احتمال زیاد رتبه کامل است اما می‌توان با بررسی خواص آن وجود، ماتریس کم‌رتبه را تایید و یا تکذیب کرد.

پژوهش‌هایی که از دید نگارنده در ادامه کارهای این پایان‌نامه قرار دارند عبارتند از:

۱. ارائه ماتریس‌های یقینی با ابعاد نزدیک‌تر به ماتریس‌های تصادفی. استفاده از گراف‌های مربوط به کدهای LDPC روشی امیدوارکننده به نظر می‌رسد (نحوه استفاده از گراف‌ها در ساخت ماتریس به طور مختصر در فصل ۱ شرح داده شد).
۲. بررسی زیرماتریس‌های (انتخاب چند سطر) ماتریس DFT به منظور یافتن بهترین زیرماتریس از نظر برآورده کردن شرط RIP. با کمک تحلیل‌های تصادفی، وجود زیرماتریس‌هایی که شرط RIP را با ضریب مناسب ارضا می‌کنند به اثبات رسیده است، اما ساختار غیرتصادفی مناسبی هنوز ارائه نشده است.
۳. در شبیه‌سازی‌های ارائه شده در این پایان‌نامه، تنها روش بازسازی OMP مورد بررسی قرار گرفته است. استفاده از سایر روش‌ها مانند BP، CoSaMP، LASSO و ... از جمله کارهای آینده‌اند.
۴. تحلیل حساسیت روش‌های نمونه‌برداری غیرخطی غیرتصادفی نسبت به نویز جمعی و ایجاد بده-بستان بین تعداد نمونه و حساسیت به نویز.
۵. معرفی و بررسی روش‌های نمونه‌برداری غیرخطی تصادفی (در این پایان‌نامه روشی غیرتصادفی ارائه شد).
۶. تعمیم قضایای نمونه‌برداری فشرده مانند مرتبه تعداد نمونه لازم و شرط کافی بازسازی (RIP) به سیگنال‌های بینهایت بعدی و پیوسته به کمک تعاریف تعمیم‌یافته در این پایان‌نامه.
۷. کاهش حساسیت به نویز در روش‌های غیرخطی بازیابی ماتریس کم‌رتبه. پیش از بازیابی ممکن است بتوان با اعمال یک تابع مناسب بر روی درایه‌ها (مانند حالتی که در نمونه‌برداری غیرخطی مطالعه شد)، حساسیت را کاهش داد.
۸. بازیابی ماتریس کم‌رتبه اعوجاج یافته هنگامی که تعدادی از درایه‌های آن موجود نباشند (در مباحث فصل ۵ تمامی درایه‌ها معلوم فرض شده‌اند).
۹. بررسی کاربردهای ماتریس‌های یقینی با ساختار Devore و BCH در ارتباطات نوری هم‌زمان و بی‌سیم غیرهم‌زمان.

## محاسبه $\tilde{k}$

در قضیه ۲-۴ نشان دادیم که  $\tilde{k}$  برابر است با تعداد دنباله‌های باینری به طول  $\tilde{m}$  که میان هر دو ۱ حداقل  $\tilde{m} - l - 1$  صفر به صورت چرخشی وجود داشته باشد. برای محاسبه این عدد، فرض کنید  $\tau_b^{(a)}$  نمایانگر تعداد دنباله‌های باینری به طول  $b$  باشد که در آن‌ها میان هر دو ۱ متوالی حداقل  $a$  تا صفر قرار داشته باشد. همچنین فرض کنید  $\kappa_b^{(a)}$  تعداد دنباله‌های باینری به طول  $b$  را نشان دهد که بین هر دو ۱ متوالی آن‌ها حداقل  $a$  تا صفر (نه لزوماً به صورت چرخشی) یافت شود. در ادامه، ابتدا به محاسبه  $\kappa_b^{(a)}$  می‌پردازیم و سپس ارتباط میان  $\tau_b^{(a)}$  و  $\kappa_b^{(a)}$  را بدست می‌آوریم.

دو نوع متفاوت دنباله باینری در  $\kappa_b^{(a)}$  شمرده می‌شوند:

۱. دنباله‌هایی که به صفر ختم می‌شوند؛ با حذف بیت انتهایی این دنباله‌ها، به دنباله‌ای با طول  $b - 1$  با خاصیت مشابه می‌رسیم. همچنین هر دنباله باینری به طول  $b - 1$  با خاصیت مطلوب را می‌توان با افزودن یک بیت صفر به انتهای آن، به دنباله‌ای به طول  $b$  با خاصیت مورد نظر تبدیل کرد. در نتیجه تعداد این دنباله‌ها  $\kappa_{b-1}^{(a)}$  است.

۲. دنباله‌هایی که به یک ختم می‌شوند؛ این بدان معناست که  $a + 1$  بیت انتهایی دنباله به صورت  $\underbrace{0, \dots, 0}_a, 1$  است. مشابه حالت ۱، هر دنباله باینری به طول  $b - a - 1$  با خاصیت مطلوب را می‌توان با افزودن بلوک  $\underbrace{0, \dots, 0}_a, 1$  به انتهای آن، به دنباله‌ای به طول  $b$  با همین خاصیت تبدیل کرد. در نتیجه، تعداد این دنباله‌های باینری  $\kappa_{b-a-1}^{(a)}$  است.

با در نظر گرفتن دو حالت قبل، دنباله بازگشتی زیر بدست می‌آید:

$$\kappa_b^{(a)} = \kappa_{b-1}^{(a)} + \kappa_{b-a-1}^{(a)} \quad (\text{الف-۱})$$

از آنجا که برای  $b \leq a+1$  حداکثر یک بیت برابر با ۱ در دنباله وجود دارد، داریم:

$$1 \leq b \leq a+1 : \kappa_b^{(a)} = b+1 \quad (\text{الف-۲})$$

با استفاده از (الف-۱)، به جای آخرین شرط اولیه  $(\kappa_{a+1}^{(a)} = a+2)$ ، می‌توانیم شرط  $\kappa_0^{(a)} = 1$  را اضافه کنیم.

اکنون تبدیل  $\mathcal{Z}$  یک طرف دنباله  $\kappa_b^{(a)}$  که به صورت

$$\kappa^{(a)}(z) = \sum_{b=0}^{\infty} \kappa_b^{(a)} z^{-b}, \quad (\text{الف-۳})$$

تعریف می‌شود، عبارت است از:

$$\kappa^{(a)}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1-z^{-(a+1)}}{1-z^{-1}-z^{-(a+1)}} \quad (\text{الف-۴})$$

بنابراین، نرخ رشد  $\kappa_b^{(a)}$  بر حسب  $b$  از مرتبه  $\gamma^b$  است که  $\gamma$  بزرگترین (از نظر قدر مطلق) ریشه  $f(z) = z^{a+1} - z^a - 1$  است. از آنجا که  $f(1) \cdot f(2) < 0$  این چندجمله‌ای در بازه  $(1, 2)$  دست کم یک ریشه دارد؛ این ریشه را با  $\gamma$  نشان می‌دهیم. در حقیقت این ریشه بزرگترین ریشه  $f(z)$  است که در این جا به اثبات آن نمی‌پردازیم، اما در صورتی که  $f(z)$  ریشه بزرگتری داشته باشد، نتایجی که در ادامه بدست می‌آید می‌تواند به عنوان کران پایینی برای نرخ‌های بدست آمده به‌شمار رود. اکنون در پی تقریب مناسبی از  $\gamma$  هستیم که:

$$1 < \gamma < 2, \quad f(\gamma) = \gamma^{a+1} - \gamma^a - 1 = 0 \quad (\text{الف-۵})$$

از آنجا که  $1 < \gamma < 2$  می‌توانیم فرض کنیم  $\gamma = 1 + \frac{1}{\delta}$  که  $\delta > 1$ :

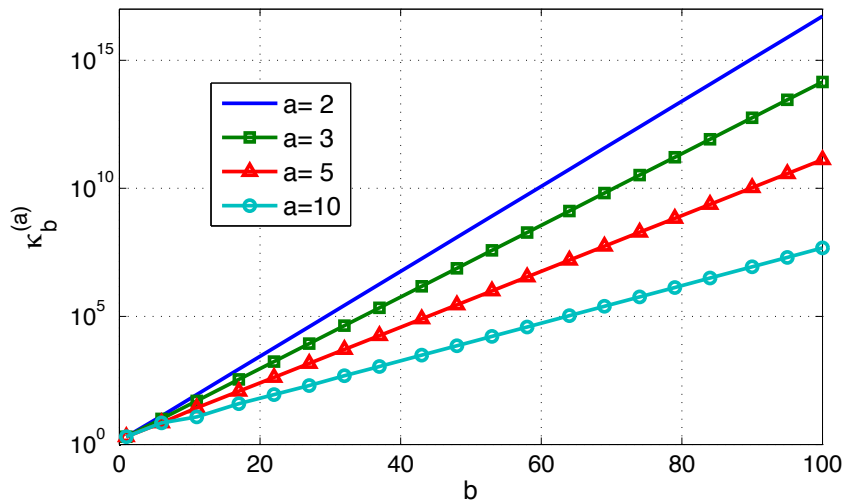
$$\gamma^{a+1} - \gamma^a = 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^a = \delta \quad (\text{الف-۶})$$

در پیوست ب نشان می‌دهیم که  $\delta > a^{\frac{1}{\gamma}}$  و در نتیجه:

$$\gamma^{\frac{a}{\ln a}} = \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^{\frac{a}{\ln a}} = \delta^{\frac{1}{\ln a}} > a^{\frac{1}{\ln a}} = e^{\frac{1}{\gamma}} > 2 \quad (\text{الف-۷})$$

حال ارتباط بین  $\tau_b^{(a)}$  و  $\kappa_b^{(a)}$  را بررسی می‌کنیم. بنا به تعریف، تمام دنباله‌های شمرده شده در  $\tau_b^{(a)}$ ، در  $\kappa_b^{(a)}$

نیز شمرده می‌شوند و در نتیجه  $\tau_b^{(a)} \leq \kappa_b^{(a)}$  همچنین اگر به انتهای یک دنباله شمرده شده در  $\kappa_{b-a}^{(a)}$ ،  $a$  صفر اضافه



شکل ۱-الف: مقادیر بدون تقریب  $\kappa_b^{(a)}$  در چند انتخاب متفاوت از  $a$  و  $b$ .

کنیم، دنباله حاصل شده در شمارش  $\tau_b^{(a)}$  محسوب می‌شود. پس  $\kappa_{b-a}^{(a)} \leq \tau_b^{(a)}$ . با ترکیب این دو نامساوی داریم:

$$\mathcal{O}(\gamma^{b-a}) \leq \tau_b^{(a)} \leq \mathcal{O}(\gamma^b) \quad (الف-۸)$$

با ادغام رابطه فوق و نتیجه ذکر شده در (الف-۷) بدست می‌آوریم:

$$(\tau_b^{(a)})^{\frac{a}{\ln a}} \gtrsim \mathcal{O}(\gamma^{b-a}) \quad (الف-۹)$$

تعبیر رابطه فوق در مورد  $\tilde{k}$  عبارت است از:

$$\tilde{k} = \tau_{\tilde{m}}^{(\tilde{m}-l-1)} \gtrsim \mathcal{O}\left(\gamma^{(l+1)\frac{\ln \tilde{m}-l-1}{\tilde{m}-l-1}}\right) \quad (الف-۱۰)$$

دقت کنید که  $\log_{\gamma} k \leq \tilde{m} - l - 1$  که حداکثر مرتبه RIP است که توسط استدلال مبتنی بر ضریب

همدوسی تضمین می‌شود. به همین دلیل برای ماتریس‌های دو قطبی ساخته شده خواهیم داشت:

$$m = \gamma^{\tilde{m}} - 1 < \gamma^{\tilde{m}-l-1} \gamma^{l+1} \lesssim \mathcal{O}\left(k(\log_{\gamma} n)^{\frac{\log_{\gamma} k}{\ln \log_{\gamma} k}}\right) \quad (الف-۱۱)$$

شکل ۱-الف رفتار حدی  $\kappa_b^{(a)}$  را برای مقادیر مختلف  $a$  و  $b$  نشان می‌دهد. به طور مثال، شکل ۱-الف نشان

می‌دهد که  $\kappa_b^{(5)} \approx 1.66 \times 10^{285} \times 10^b$  در حالی که تقریب‌های استفاده شده حاکی از  $\kappa_b^{(5)} \geq \mathcal{O}(1/25^b)$  است.

## پیوست پ

# محاسبه $\delta$

در این پیوست نشان می‌دهیم که اگر  $\delta = (1 + \frac{1}{\delta})^a$  که  $a \in \mathbb{N}$  در این صورت  $\delta > a^{\frac{1}{\delta}}$ . برای این منظور لم زیر را بیان می‌کنیم:

لم ۱-ب تابع  $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{7}\ln x$  برای  $x > 0$  همواره مثبت است.

اثبات: واضح است که  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . نشان می‌دهیم  $f'(x)$  (مشتق  $f$ ) تنها یک ریشه در  $(0, \infty)$

دارد که مینیمم موضعی  $f$  را تولید می‌کند:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{20}x^{-\frac{5}{4}} - \frac{1}{7}x^{-1} = \frac{3(x^{\frac{1}{4}})^4 - 7(x^{\frac{1}{4}})^4 + 21 \cdot x^{\frac{1}{4}}}{20(x^{\frac{1}{4}})^4} \quad (1-ب)$$

تنها ریشه مثبت چندجمله‌ای  $3y^4 - 7y^4 + 21 = 0$  برابر با  $y \approx 1.277$  است؛ در نتیجه حداقل مقدار  $f$  روی محور مثبت در نقطه  $x \approx 1.277^{10} \approx 11.532$  حاصل می‌شود. با محاسبه مقدار تابع در این نقطه داریم

$$f(11.532) \approx 0.18 > 0$$

■

حال با استفاده از لم فوق برای  $x \geq 1$  داریم:

$$0 < f(x) = x(x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{1}{4}}) - \ln x^{\frac{1}{7}} \leq x \ln(1 + x^{-\frac{3}{2}}) - \ln x^{\frac{1}{7}} \quad (2-ب)$$

بنابراین:

$$e^{\ln x^{\frac{1}{7}}} < e^{x \ln(1 + x^{-\frac{3}{2}})} \Rightarrow \frac{(x^{\frac{1}{7}})^{x+1}}{(1 + x^{-\frac{3}{2}})^x} < 1 \quad (3-ب)$$

دقت کنید که تابع  $\psi(x) = \frac{x^{a+1}}{(1+x)^a} = x(1 - \frac{1}{1+x})^a$  روی محور مثبت، اکیداً صعودی است (هر دوی  $x$  و  $1 - \frac{1}{1+x}$  توابعی صعودی هستند). با استفاده از رابطه  $(1 + \frac{1}{\delta})^a = \delta$  می‌دانیم که  $\psi(\delta) = 1$  از سوی دیگر، با قراردادن  $x = a$  در (۳-ب) بدست می‌آوریم:  $\psi(a^\gamma) < 1$  که نشان می‌دهد  $\delta > a^\gamma$ .