دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

پایان نامه دکتری

گرایش مخابرات سیستم

نمونه برداری فشرده با روش‌های غیرتصادفی

نگارنده

آرش امینی

استاد راهنما

دکتر فرخ مروستی

بهمن ۱۳۸۹

این پروژه تحت قرارداد پژوهشی شماره ۵۰۰/۶۹۴۷ مورخ ۱۳۸۸/۲/۱۴ از پشتیبانی مادی و معنوی

مرکز تحقیقات مخابرات ایران بهره‌مند شده است.

بسم الله الرحمن الرحيم

توجه

این پروژه بر اساس قرارداد شماره (۵۰۰/٦۹٤۷) از حمایت مالی مرکز تحقیقات مخابرات ایران برخوردار شده است.

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی برق

پایان‌نامه دکتری

عنوان: **نمونه‌برداری فشرده با روش‌های غیرتصادفی**

نگارش: **آرش امینی**

اعضا هیات داوران:

دکتر فرخ مروستی امضاء:.....

دکتر محمدرضا عارف امضاء:.....

دکتر جواد صالحی امضاء:.....

دکتر پاییز عزمی امضاء:.....

دکتر بابک سیف امضاء:.....

دکتر کسری علیشاهی امضاء:.....

Dr. Michael Unser امضاء:.....

تاریخ: ۲۰ بهمن ۱۳۸۹.

تقدیم و قدردانی

طی مراحل اجرای این پایان‌نامه از مساعدت و همراهی بسیاری از دوستان بهره‌مند بودم که بر خود لازم می‌دانم در این‌جا از آن‌ها تشکر کنم. ترتیب ذکر اسامی این افراد، الفبایی است:

علی اخایی، امیر اکبری، پدرام پاد، پوریا پاکروح، امین توکلی، آرین حاذقی، فرزان حدادی، احمدرضا حسینی، پویا دهقان‌تفتی، سینا زاهدپور، علی سالمی، مهدی سلطان‌الکتابی، مجتبی سلطان‌علیان، میلاد شریف، مهدی عالم، محسن غفاری، محمود فردوسی‌زاده، فرشید فرهت، سهیل فیض‌خانکندی، امین کرباسی، رامتین مدنی، وحید منتظرحجت، پیمان مهاجرین‌اصفهانی و مجید ولی‌اللهزاده.

نهایت سپاس خود را نثار خانواده‌ام می‌کنم که همواره پشتیبان و مشوقم بوده‌اند؛ به‌ویژه مادرم، مهران مجدی، که زحمت تایپ و ویراستاری این پایان‌نامه را بر عهده داشت.

از جناب آقای دکتر بابک سیف به دلیل مطالعه دقیق و بهبود کیفیت متن پایان‌نامه، قدردانی می‌کنم.

موفقیت خود را در اتمام دوره دکتری مدیون راهنمایی‌ها و حمایت‌های جناب آقای دکتر فرخ مروستی هستم که مرا همچون فرزند خویش مورد لطف و محبت قرارداد.

و در انتها، این پایان‌نامه را به همسر عزیز و فداکارم، میترا فاطمی، تقدیم می‌کنم که در طول دوره دکتری، نه تنها مرا همراهی نمود، بلکه در بسیاری از موارد با از خودگذشتگی مرا مورد حمایت خویش قرارداد.

چکیده:

در مبحث نمونه برداری فشرده، به دنبال نمایش سیگنال‌های تنک با کمترین تعداد نمونه ممکن هستیم به نحوی که نمونه‌ها به طور یکتا بردار تنک را مشخص کنند. در این پایان‌نامه، مسأله نمونه‌برداری فشرده با ساختار معین (در مقابل تصادفی) از چندین دیدگاه مورد بررسی قرار می‌گیرد. نحوه نمونه‌برداری در تمام روشهای ارائه شده تا کنون به صورت خطی و توسط یک ماتریس که عمدتاً تصادفی است، در نظر گرفته شده است. در این پایان‌نامه ابتدا چند روش تولید ماتریس معرفی می‌شود که یکی از آن‌ها یک روش مبتنی بر کدهای متعامد نوری برای ساخت ماتریس‌های باینری است. در روشی دیگر، به کمک کدهای BCH راه‌کاری برای تولید ماتریس‌های دو قطبی ارائه می‌دهیم. کدهای بلوکی گردشی علاوه بر آن که قابلیت ساخت ماتریس نمونه‌برداری را فراهم می‌کنند، پیچیدگی محاسباتی در روند بازسازی سیگنال تنک را نیز کاهش می‌دهند. همچنین به کمک تعمیم کدهای BCH، ماتریس‌های مختلط را معرفی می‌کنیم. این ماتریس‌ها از نظر ابعاد تنوع بیشتری ایجاد می‌کنند و در نتیجه راحت‌تر می‌توان آن‌ها را با ساختارهای واقعی منطبق کرد. علاوه بر طرح‌های تولید ماتریس، در گام بعدی روش‌هایی برای ادغام این ماتریس‌ها ارائه می‌کنیم به گونه‌ای که ماتریس حاصل همچنان شرایط لازم ماتریس‌های نمونه‌برداری را داراست و به علاوه طیف وسیع‌تری از ابعاد را پوشش می‌دهد.

جدا از مبحث نمونه‌برداری خطی، روش های غیرخطی و مزایای آن‌ها را نیز بررسی می‌کنیم. در صورتی که حوزه تنک‌بودن برای سیگنال‌های مورد نظر مشخص نباشد، هیچ روش خطی نمی‌تواند بازسازی کامل را تضمین کند. در این جا نشان می‌دهیم که در چنین شرایطی می‌توان به کمک روش‌های غیرخطی سیگنالهای تک-تنک را بازسازی کرد. علاوه بر این در صورت مشخص بودن حوزه تنک‌بودن، می‌توان به کمک روش‌های غیرخطی، همزمان تعداد نمونه‌های لازم و پیچیدگی محاسباتی در نحوه بازسازی را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش داد. علی‌رغم تمام مزایای روش‌های غیرخطی، مشکل اصلی این روش‌ها حساسیت نسبت به نویز جمعی است.

در مبانی نمونه‌برداری فشرده، هدف ادغام دو عمل نمونه‌برداری و فشرده‌سازی است. از این رو، فرض واقعی‌تر آن است که سیگنال‌های ورودی پیوسته‌اند و نه گسسته. اما اولین مشکل در این راه، تعریف مفاهیم تنک‌بودن و فشرده‌پذیری برای سیگنال‌های پیوسته است. در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم که این دو مفهوم را می‌توان به طور مناسبی به دنباله‌های نامتناهی یقینی و حتی تصادفی تعمیم داد. این مرحله در حقیقت اولین گام برای تعمیم مباحث نمونه‌برداری فشرده به مجموعه‌های بی‌نهایت بعدی و پیوسته از سیگنال‌هاست.

همان طور که اشاره شد، مفهوم تنک‌بودن اغلب بر روی بردارها مورد بررسی قرار می‌گیرد. اما پیشتر تعمیم مفهوم تنک‌بودن برای ماتریس بر اساس رتبه آن (به جای مقادیر درایه‌ها) نیز مورد توجه قرار گرفته است. در انتهای پایان‌نامه به بررسی مسأله خاصی در مورد ماتریس‌های تنک (به مفهوم رتبه) می‌پردازیم. به طور دقیق‌تر، بررسی می‌کنیم که چگونه می‌توان یک ماتریس کم‌رتبه را که درایه‌های آن تحت تاثیر یک اعوجاج غیرخطی یکسان قرار گرفته‌اند، بازیابی و در نتیجه فشرده کرد.

کلمات کلیدی:

۱- نمونه‌برداری فشرده Compressed Sensing.
۲- تنک‌بودن Sparsity.
۳- تصویر خطی Linear Projection.
۴- نمونه‌برداری غیرخطی Nonlinear Sampling.
۵- دنباله تصادفی با توزیع مستقل یکنواخت i.i.d. Sequence.
۶- فشرده‌پذیری Compressibility.
۷- ماتریس کم‌رتبه Low-rank Matrix.

فهرست مطالب

۱ مقدمه **۱**

۱–۱ نمونه‌برداری شانون تا نمونه‌برداری فشرده ۱

۱–۲ نمونه‌برداری فشرده ۳

۱–۳ کاربردهای نمونه‌برداری فشرده ۸

۱–۴ تکمیل ماتریس ۹

۱–۵ طبقه بندی مطالب پایان‌نامه ۱۰

۲ کلیات نمونه‌برداری فشرده **۱۲**

۲–۱ مقدمه ۱۲

۲–۲ عرض گلفاند ۱۲

۲–۳ بررسی نمونه‌برداری فشرده از دیدگاه نظریه نرخ–اعوجاج ۱۶

۲–۴ ارتباط نمونه‌برداری فشرده با نظریه کدگذاری ۱۸

۲–۵ مروری بر روش‌های بازسازی ۲۱

۲–۵–۱ کمینه کردن نرم ℓ_1 . . . . . ۲۱

۲–۵–۲ روش‌های حریص ۲۳

۲–۵–۳ روش‌های آستانه‌ای ۲۴

۲–۵–۴ روش‌های تقریب نرم ۲۵

۳ مروری بر ماتریس‌های حسگر ۲۷

۳–۱ مقدمه ۲۷

۳–۲ ماتریس‌های حسگر تصادفی ۲۸

۳–۳ ماتریس‌های حسگر غیرتصادفی ۳۱

۴ ماتریس‌های حسگر غیرتصادفی پیشنهادی ۳۹

۴–۱ مقدمه ۳۹

۴–۲ ماتریس‌های دودویی ۴۰

۴–۳ ماتریس‌های دو قطبی به کمک کدهای BCH ۴۳

۴–۳–۱ کدهای BCHبا $\tilde{d}_{min}$ بزرگ ۴۴

۴–۳–۲ الگوریتم تولید ماتریس ۴۸

۴–۴ ماتریس‌های مختلط به کمک کدهای غیردودویی ۵۰

۴–۴–۱ کدهای pBCH –سمبلی با $\tilde{d}_{min}$ بزرگ ۵۳

۴–۴–۲ الگوریتم تولید ماتریس ۵۶

۴–۵ ادغام ماتریس‌ها ۵۷

۴–۵–۱ ادغام با ماتریس‌های دودویی ۵۸

۴–۵–۲ ضرب کرونکر ۶۰

۴–۶ بازسازی سریع ۶۱

۴–۷ نتایج شبیه‌سازی ۶۴

۵ نمونه‌برداری غیرتصادفی غیرخطی ۷۰

۵–۱ مقدمه ۷۰

۵–۲ نمونه‌برداری غیرتصادفی برای حوزه تنک‌بودن نامعلوم ۷۰

۵–۳ نمونه‌برداری غیرتصادفی برای حوزه تنک‌بودن معلوم ۷۶

۵–۴ نتایج شبیه‌سازی ۸۱

۶ دنباله‌های تصادفی فشرده‌پذیر ۸۳

۶-۱ مقدمه ۸۳

۶-۲ دنباله‌های نامتناهی فشرده‌پذیر ۸۴

۶-۳ فشرده‌پذیری دنباله‌های تصادفی ۸۶

۶-۴ تشخیص توزیع احتمال‌های فشرده‌پذیر ۸۸

۶-۵ نتایج عددی ۹۶

۷ کاهش رتبه در ماتریس‌ها به کمک عملگرهای المانی ۹۹

۷-۱ مقدمه ۹۹

۷-۲ نمادها و شرح مساله ۱۰۲

۷-۳ توان صحیح ۱۰۳

۷-۴ توان حقیقی ۱۰۵

۷-۵ نتایج عددی ۱۰۹

۸ جمع بندی و نتیجه‌گیری ۱۱۲

الف محاسبه $\tilde{k}$ ۱۱۵

ب محاسبه δ ۱۱۸

فهرست جداول

۴–۱ چندجمله‌ای آزمون توازن برای مقادیر متفاوت $\tilde{m}$ و $i = ۳$. ۵۰

۴–۲ $\frac{\mu_{BCH}}{\mu_{WB}}$ برای چند ماتریس p–سمبلی $(p^{۲l} - ۱) \times p^{۳l}$ با pهای مختلف. ۵۶

۶–۱ تعدادی از توزیع‌های فشرده‌پذیر با میرایی مرتبه $|t|^{-(q+۱)}$ ۹۵

فهرست اشکال

۱–۱ (a) یک بردار تنک در فضای سه بعدی، (b) تقریب حاصل از کمینه‌سازی نرم ℓ_2 برای این بردار، (c) تقریب حاصل از کمینه‌سازی نرم ℓ_1 برای این بردار [۱۰]. ۶

۱–۴ درجه چندجمله‌ای $h(x)$ برای مقادیر متفاوت $\tilde{m}$ و i. ۵۰

۲–۴ عمل ادغام ماتریس $\mathbf{B}$ با ماتریس دودویی $\mathbf{A}$. ۵۹

۳–۴ ضرب کرونکر دو ماتریس ($\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$). ۶۰

۴–۴ درصد بازسازی ($\text{SNR}_{rec.} \geq ۱۰۰dB$) در مقادیر مختلف k. ماتریس‌های حسگر با ساختار OOCو Devoreابعاد ۳۷۸ × ۶۳ و ۳۷۸ × ۶۴ دارند. همچنین دو ماتریس تصادفی دودویی با ابعاد ۳۷۸ × ۶۴ و ۳۷۸ × ۶۳ در نظر گرفته شده‌اند. ۶۴

۵–۴ درصد بازسازی ($\text{SNR}_{rec.} \geq ۱۰۰dB$) در مقادیر مختلف k. ماتریس‌های حسگر با ساختار BCH، Devoreو ادغامی (Ternary) ابعاد ۵۱۲ × ۶۳، ۵۱۲ × ۶۴ و ۵۱۲ × ۴۹ دارند. همچنین دو ماتریس تصادفی گوسی ابعاد ۵۱۲ × ۶۴ و ۵۱۲ × ۴۹ دارند. ۶۵

۶–۴ SNRسیگنال‌های ۱۵–تنک بازسازی شده هنگامی که نمونه‌های فشرده تحت تاثیر نویز جمعی با توان‌های متفاوتی قرار گیرند. ماتریس‌های حسگر با ساختار BCH، Devoreو ادغامی (Ternary) ابعاد ۵۱۲ × ۶۳، ۵۱۲ × ۶۴ و ۵۱۲ × ۴۹ دارند. همچنین دو ماتریس تصادفی گوسی ابعاد ۵۱۲ × ۶۴ و ۵۱۲ × ۴۹ دارند. ۶۶

۷–۴ درصد بازسازی کامل ($\text{SNR}_{rec.} \geq ۱۰۰dB$) هنگامی که نمونه‌ها بدون نویز هستند. ماتریس BCHبر مبنای کدهای $p = ۳$ سمبلی ساخته شده است و ابعاد تمامی ماتریس‌ها ۷۲۹ × ۸۰ است. ۶۷

۸–۴ SNRسیگنال ۲۵–تنک بازسازی شده برای توان‌های متفاوت نویز جمعی. ماتریس BCHبر مبنای کدهای $p = ۳$ سمبلی ساخته شده است و ابعاد تمامی ماتریس‌ها ۷۲۹ × ۸۰ است. . . ۶۸

۹–۴ SNRسیگنال ۲۵–تنک بازسازی شده برای توان‌های متفاوت نویز جمعی. ماتریس BCHبر مبنای کدهای $p = ۵$ سمبلی ساخته شده است و ابعاد تمامی ماتریس‌ها ۱۵۶۲۵ × ۶۲۴ است. ۶۸

۱۰–۴ درصد بازسازی کامل ($\text{SNR}_{rec.} \geq ۱۰۰dB$) هنگامی که نمونه‌ها بدون نویز هستند. ابعاد ماتریس‌های بر مبنای ادغام دودویی، ادغام کرونکر، توابع Chirp، تصادفی گوسی و سطرهای تصادفی ماتریس DFTبه ترتیب عبارتند از ۴۶۰۸ × ۶۴، ۱۷۲۸ × ۶۳، ۴۶۰۸ × ۷۵، ۴۶۰۸ × ۶۴ و ۴۶۰۸ × ۶۴. . . . . ۶۹

۴–۱۱ مقایسه زمان لازم برای بازسازی یک بردار تنک ۱×۱۵۶۲۵ از نمونه‌های فشرده ۱×۶۲۴ توسط ماتریس تصادفی (OMPساده) و ماتریس‌های BCH$۵ = p$ سمبلی (OMPتسریع شده). ۶۹

۵–۱ کیفیت سیگنال بازسازی شده توسط نمونه‌های غیرخطی برای مرتبه‌های متفاوت تنک‌بودن. . ۸۱

۵–۲ کیفیت سیگنال بازسازی شده توسط نمونه‌های غیرخطی به ازای $۶ = k$ در OSRهای متفاوت. ۸۲

۶–۱ یک تحقق زمانی از دنباله تصادفی و .i.i.dبا توزیع احتمال Student's tو پارامتر $۰/۵ = q$. . ۹۶

۶–۲ نمودارهای متوسط تابع $\frac{\sigma_p(k;\{a_i\}_{i=۱}^n)}{\sigma_p(n;\{a_i\}_{i=۱}^n)}$ بر حسب $\frac{k}{n}$ برای تحقق‌های .i.i.dاز توزیع احتمال‌های گوسی، لاپلاس، کوشی و Student's t($q = ۰/۵$) به ازای $p = ۱$ و $n = ۱۰^۴$. . ۹۷

۶–۳ نمودارهای متوسط تابع $\frac{\sigma_p(k;\{a_i\}_{i=۱}^n)}{\sigma_p(n;\{a_i\}_{i=۱}^n)}$ بر حسب $\frac{k}{n}$ در nهای مختلف برای تحقق‌های .i.i.dاز توزیع احتمال کوشی هنگامی که $p = ۰/۹$ و $p = ۱/۱$ مورد نظر باشند. ۹۸

۷–۱ آرایش دایروی حسگرها در توموگرافی فراصوتی. ۱۰۱

۷–۲ (a)ضرایب بسط تیلور $T_{\tilde{\mathbf{B}}}(x)$ و (b)مقادیر چندجمله‌ای‌های حاصل از در نظر گرفتن متناهی جمله بسط تیلور $T_{\tilde{\mathbf{B}}}(x)$ پس از حذف فاکتور $x^۴$ هنگامی که نویز جمعی در حد $\text{SNR} = ۱۰۰dB$ است. ۱۱۰

۷–۳ (a)ضرایب بسط تیلور $T_{\tilde{\mathbf{B}}}(x)$ و (b)مقادیر چندجمله‌ای‌های حاصل از در نظر گرفتن متناهی جمله بسط تیلور $T_{\tilde{\mathbf{B}}}(x)$ پس از حذف فاکتور $x^۴$ هنگامی که نویز جمعی در حد $\text{SNR} = ۵۰dB$ است. ۱۱۰

الف–۱ مقادیر بدون تقریب $\kappa_b^{(a)}$ در چند انتخاب متفاوت از a و b. ۱۱۷

فهرست کلمات اختصاری

BP	Basis Pursuit
CFAR	Constant False Alarm Rate
CS	Compressed Sensing
DCT	Discrete Cosine Transform
DFT	Discrete Fourier Transform
FFT	Fast Fourier Transform
FISTA	Fast ISTA
GPSR	Gradient Projection for Sparse Reconstruction
IDFT	Inverse Discrete Fourier Transform
IHT	Iterative Hard Thresholding
IMAT	Iterative Method with Adaptive Thresholding
ISTA	Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm
LS	Least Squares
MP	Matching Pursuit
OMP	Orthogonal Matching Pursuit
OOC	Optical Orthogonal Code
OSR	Over-Sampling Ratio
RIP	Restricted Isometry Property
RS	Reed-Solomon
SL0	Smoothed ℓ_0 norm
SPGL1	Spectral Projected-Gradient ℓ_1 norm
SNR	Signal to Noise Ratio
SVD	Singular Value Decomposition