Rappels du second semestre

21 juillet 2010

1 Stabilité et causalité

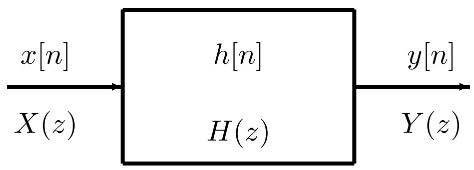

Figure 1 – Schéma bloc d'un système LID.

1.1 Définitions

Causalité : $\forall n < 0 \qquad h[n] = 0$,
Anticausalité : $\forall n \geq 0 \qquad h[n] = 0$,
Stabilité (BIBO) : $(\max_n |x[n]| < \infty \implies \max_n |y[n]| < \infty)$. Équivalent à $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h[n]| < \infty$,
Fonction de transfert en z : $H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] z^{-n}$,
Pôle : valeur de z dans $\mathbb{C} \setminus 0$ telle que $1/H(z) = 0$,
Zéro : valeur de z dans $\mathbb{C} \setminus 0$ telle que $H(z) = 0$,
Analycité : $H(z)$ est analytique sur un domaine $\mathcal{D}$ revient à $\forall z \in \mathcal{D} \quad \sum_{n \geq 0} |h[n] z^{-n}| < \infty$.

1.2 Liens avec la transformée en z (TZ)

Domaine de convergence : $H(z) = \sum_{n \geq 0} h[n](z^{-1})^n + \sum_{n > 0} h[-n](z)^n$. On fait apparaître deux séries entières ; l'une en z^{-1} et l'autre en z. Elles ont chacune leur rayon de convergence ; respectivement $1/\rho_{\text{min}}$ et ρ_{max}. Si $\rho_{\text{min}} \leq \rho_{\text{max}}$ le domaine de convergence pour z est la couronne entre ces deux rayons. Sinon, le domaine de convergence est l'ensemble vide (*i.e.* , n'existe pas). Notons que ces rayons ρ_{min} et ρ_{max} peuvent être nuls ou infinis. Ainsi, un disque ou son complémentaire dans $\mathbb{C}$ sont des domaines de convergence possibles. Chaque système LID a un domaine de convergence unique associé. Des systèmes LID différents peuvent partager une même fonction de transfert $H(z)$, chacun ayant alors un domaine convergence propre. Voir $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ par exemple.

Causalité : Dans le cas d'un système LID causal, on peut écrire $H(z) = \sum_{n \geq 0} h[n](z^{-1})^n$. La transformée en z prend donc la forme d'une série entière en z^{-1}. La série en z, réduite à néant, converge inconditionnellement et donc $\rho_{\text{max}} = \infty$. Par conséquent, le domaine de convergence est le complémentaire d'un disque de rayon ρ_{min}. Ce peut être espace $\mathbb{C}$ entier si le disque en question est réduit à l'ensemble nul ($\rho_{\text{min}} = 0$).

Stabilité : La condition de stabilité peut se réécrire $\sum_{n \geq 0} |h[n] z^{-n}| < \infty$ pour $|z| = 1$. Elle est donc équivalente à l'analycité de H sur $\mathcal{C}(O, 1)$ (le cercle de centre O et de rayon 1, dit *cercle unité*). En d'autres termes, le cercle unité doit appartenir au domaine de convergence associé au système (se souvenir que la fonction de transfert ne caractérise pas entièrement un système LID).

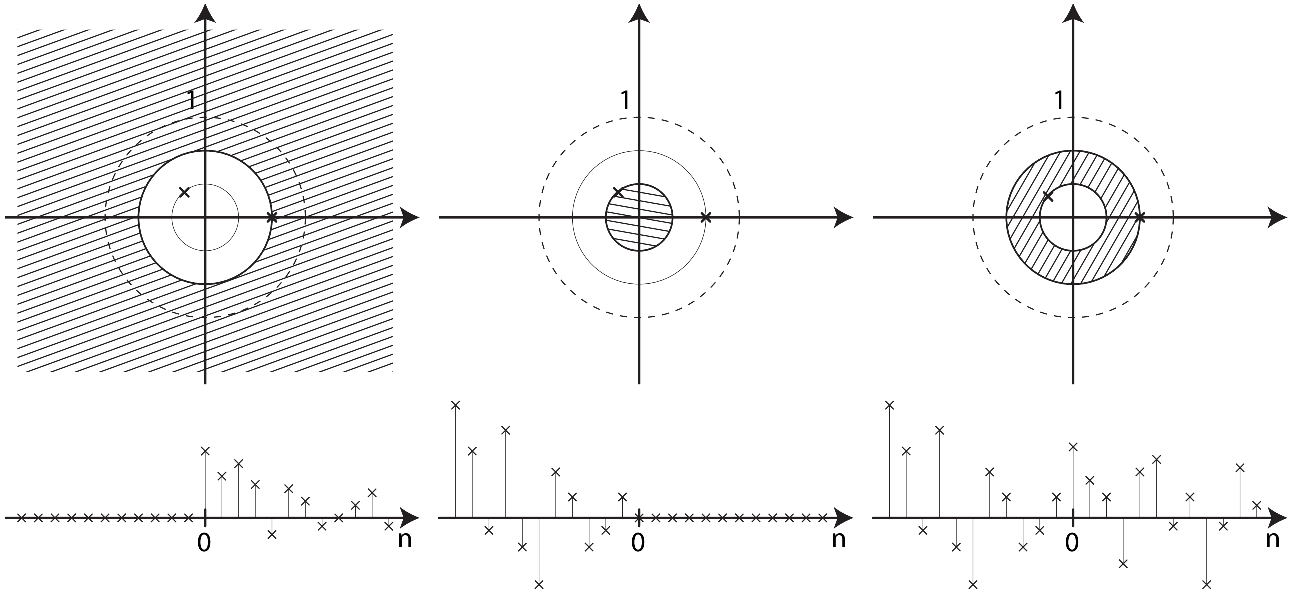

FIGURE 2 – Illustration des propriétés d'un système LID en fonction de son domaine de convergence. En haut : domaines de convergence dans le plan complexe. En bas : réponses impulsionnelles. Propriétés des systèmes de gauche à droite : 1) causal et stable, 2) anticausal et instable, 3) ni causal, ni anticausal et instable.

Stabilité et causalité : Si le système est causal —ce qui est le cas dans la plupart des systèmes implémentés— le domaine de convergence est le complémentaire d'un disque (*cf.* ci-dessus) de rayon $\rho_{\min}$. Alors, pour que le cercle unité soit inclus dans ce domaine, on doit avoir $\rho_{\min} < 1$; c'est la condition de stabilité dans le cas causal.

Système réalisable : Ce type de système possède une fonction de transfert qui s'écrit comme une fraction rationnelle. Ses pôles déterminent les zones de convergences possibles (*cf.* Figure 2). Dans le **cas causal**, la zone de convergence complémentaire est un disque centré en O, de rayon $\rho_{\min}$ correspondant au plus grand module des pôles. Alors, la condition de stabilité $\rho_{\min} < 1$ évoquée ci-dessus est équivalente à dire que tous **les pôles sont à l'intérieur du cercle unité**.

2 Équations aux différences

2.1 Exemple 1 : système intégrateur

On considère le système LID caractérisé par l'équation aux différences : $y[n] - y[n-1] = x[n+1]$.

De l'équation aux différences à la fonction de transfert En appliquant une transformation en z à l'équation aux différences, et en exploitant les propriétés de décalage, on obtient : $Y(z) - z^{-1}Y(z) = zX(z)$. La fonction de transfert en z est donc $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{1-z^{-1}}$.

Pôles et zéros Étant donné que $\frac{1}{H(1)} = 0$, on peut conclure que 1 est un pôle de H. On ne considère **jamais** 0 comme un pôle ou un zéro ; le terme z au dénominateur exprime juste un décalage.

De la fonction de transfert à la réponse impulsionnelle On peut ré-écrire H sous la forme $H(z) = z \sum_{n \geq 0} z^{-n} = \sum_{n \geq -1} z^{-n}$. Par identification, on trouve $h[n] = 1$ pour $n \geq -1$.

Causalité D'après l'équation aux différences, on peut remarquer que le système ne peut pas être causal car $y[n]$ va dépendre de l'entrée à un instant futur ($x[n+1]$). On peut également observer directement la réponse impulsionnelle et voir que $h[0] = h[-1] \neq 0$ donc que le système ne peut être ni causal ni anticausal.

Stabilité Sachant que le système n'est pas causal on sait que son domaine de convergence à la forme d'un disque ou d'une couronne avec 1, module de l'unique pôle, comme borne extérieure. Le cercle unité n'en fait donc pas strictement partie. Ce qui implique que le système est instable—marginalement dans ce cas. D'autre part, $\sum_n |h[n]|| = \sum_n 1 = \infty$, d'où l'on peut conclure également que le système est instable.

2.2 Exemple 2 : système du premier ordre

On considère le système LID caractérisé par l'équation aux différences : $y[n] - ay[n-1] = x[n]$.

De l'équation aux différences à la fonction de transfert En appliquant une transformation en z à l'équation aux différences, et en exploitant les propriétés de décalage, on obtient : $Y(z) - az^{-1}Y(z) = X(z)$. La fonction de transfert en z est donc $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-az^{-1}}$.

Pôles et zéros On remarque que $\frac{1}{H(a)} = 0$, donc a est un pôle de H si $a \neq 0$. Il n'y a pas de zéro.

De la fonction de transfert à la réponse impulsionnelle On sait que $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$. Seules deux réponses impulsionnelles donnent ce résultat : $h[n] = a^n u[n]$ (causal) et $-a^n u[-n-1]$ (anticausal). Sans plus d'information, impossible de savoir laquelle correspond à notre système.

Causalité On peut remarquer grâce à l'équation aux différences que $y[n]$ va dépendre uniquement de l'entrée $x[n]$ et de ses valeurs à des instants passés. Le système est donc causal, ce qui permet de dire que sa réponse impulsionnelle est $h[n] = a^n u[n]$, associée au domaine de convergence $|z| > |a| = \rho_{\min}$.

Stabilité La réponse impulsionnelle déterminée ci-dessus est associée au domaine de convergence $|z| > |a| = \rho_{\min}$. Le système sera donc stable si $|a| < 1$. Si on sait le système causal et qu'il admet a comme unique pôle, on en déduit immédiatement qu'il est stable si $|a| < 1$ (pôle dans le cercle unité).

3 Exemple de mise en série

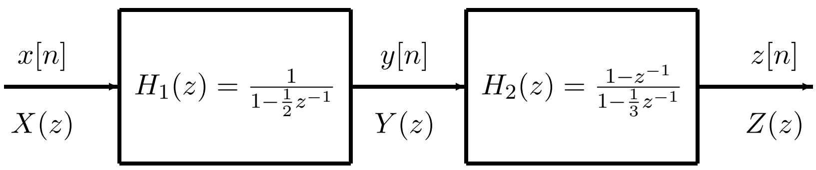

Figure 3 – Mise en série de deux sous-systèmes LID.

D'après le système décrit Figure 3 qui consiste en la mise en série de deux sous-systèmes LID, on cherche à déterminer :

– la fonction de transfert en z du système LID global : $H(z)$,

– une équation aux différences caractérisant le système global,
– la réponse impulsionelle du système global.

Fonction de transfert On a $H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ et $H_2(z) = \frac{Z(z)}{Y(z)}$, donc $H(z) = \frac{Z(z)}{X(z)} = H_1(z)H_2(z) = \frac{1-z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$. Les transformées en z se multiplient.

Équation aux différences On peut ré-écrire $H(z) = \frac{Z(z)}{X(z)} = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$. Donc $(1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2})Z(z) = (1 - z^{-1})X(z)$. En repassant dans le domaine discret, on obtient l'équation aux différences : $x[n] - x[n-1] = z[n] - \frac{5}{6}z[n-1] + \frac{1}{6}z[n-2]$.

Réponse impulsionelle La réponse impulsionelle totale est $h = (h_1 * h_2)$. On peut trouver facilement son expression en décomposant en fractions simples la transformée en z. On pose $x = z^{-1}$.

$$H(z) = H(x^{-1}) = \frac{1-x}{(1-\frac{1}{2}x)(1-\frac{1}{3}x)} = \frac{\alpha}{1-\frac{1}{2}x} + \frac{\beta}{1-\frac{1}{3}x} = \frac{\alpha}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\beta}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}.$$

On trouve $\alpha = -3$ et $\beta = 4$. Donc $h[n] = -3(\frac{1}{2})_+[n] + 4(\frac{1}{3})_+[n]$.