スプライン関数とそのディジタル信号処理・画像処理への応用に関する研究

代表研究者　市　毛　弘　一　横浜国立大学大学院工学研究院講師
共同研究者　Thierry Blu　スイス連邦工科大学ローザンヌ校シニアアシスタント
共同研究者　Michael Unser　スイス連邦工科大学ローザンヌ校教授

要　旨

本稿では，２つの異なる関数基底を用いて信号を補間する手法として一般化区分的線形補間法を提案し，こうした関数系の信号処理・画像処理における有用性を検証した結果について報告する。

提案する関数系は，線形近似と同様に近似オーダー(approximation order)が2であり，階段関数や折れ線を正確に再構成できる。関数基底は２つの実パラメータ τ と α によって特徴付けられる。パラメータ τ は関数基底の座標に対応するシフトパラメータであり，もう一方のパラメータ α は関数の非対称性をあらわすパラメータである。これらのパラメータを変化させることで，入力信号・画像に関係なく，近似精度を向上させ最適化を図ることが可能となることを示す。

この補間手法では，２つのパラメータを τ=0.21, α=1 と設定することで，シフト線形補間（shifted-linear interpolation）を再現することができる。ここでは，このパラメータの組み合わせ以外に，τ=0.21, α=0.58 と設定した場合に，シフト線形補間と同様の精度で信号の補間を行うことができることに注目する。シフト線形補間では分解プロセスにおいて IIR フィルタを必要としていたが，後者のパラメータを設定した場合は FIR フィルタのみで構成可能である。これにより，後者のパラメータはシフト線形補間におけるギブス（発振）現象を大いに低減できる。

こうしたパラメータを設定した場合の有効性を，補間操作を用いてディジタル画像を回転した場合のピーク SN 比（原画像と回転した画像の信号・ノイズ比），補間後の画像の最大振幅などを検証することを通して評価する。

1　まえがき

補間操作はディジタル信号や画像を処理する上での基本的な技術のひとつである[1,2]。これまでに数々の手法が提案されているが，（区分的）線形補間はその計算コストの少なさから依然として多くの場面で用いられている。この線形補間の問題点は補間された信号や画像の精度の悪さである。多くの場面において，画像がぼやけてしまったり，原画像と異なる場所が強調されてしまったりといった問題を生じてしまう。

こうした問題点を改善する手法として，シフト線形補間が提案されている[3]。この手法は，計算コストを線形補間と同程度に少なく保ちながら，補間により再構成された画像の精度を大きく改善するものとして注目されている。しかしながら，こうした精度良い補間ができる利点と同時に，特にステップ状の関数を補間する場合に，ギブス現象のような発振を頻繁に起こしてしまうことが指摘されている[3]。こうした発振は，特に画像を回転する場合のように補間操作を複数回繰り返して行う場合などに，画素値の存在範囲を大幅に広くしてしまうという問題がある。

線形補間法とシフト線形補間法は，ともに左右対称なテント状の三角波を基底関数としていた。基底関数には本来，左右対称であるという条件は必要ないことを考えると，非対称な基底関数を用いて，より一般化された信号分解・再構成プロセスを構築することができる。ただし，近似理論の観点から考えると，非対称な基底関数を用いる場合でも，“partition of unity”と呼ばれる特性を満足することが望ましい。言い換えると，階段関数や折れ線（区分的一次式）を完全に再構成できることが望まれる[4]。こうした特性を満足する非対称な基底関数を考えることができるか，さらには，そうした基底関数が信号処理や画像処理において有用であるのか，見極める必

要がある。

本稿では，複数の関数基底を用いて，区分的多項式による補間法をより一般化して拡張することを考え，その考え方と信号処理・画像処理応用における有用性について検証した結果を報告する。まず，補間の問題をフィルタバンクを設計・構成する問題として捉え，係数列や再構成信号を求める過程について検討する。次に，こうして得られた手法を信号処理・画像処理における諸問題に適用し，他の手法との比較により有効性を検証する。提案手法は，２つの実パラメータ τ と α によって特徴付けられる。パラメータ τ は関数基底の座標に対応するシフトパラメータであり，もう一方のパラメータ α は関数の非対称性をあらわすパラメータである。これらのパラメータを変化させることで，入力信号・画像に関係なく，近似精度を向上させ最適化させることが可能となることを示し，実際に(1)ピーク SN 比を最大にし，かつ(2)ギブス現象のような発振を小さく抑えることが可能な，最適値の組み合わせを導出する。結果として，パラメータの組み合わせによっては分解プロセスを FIR フィルタのみで構成可能であり，ギブス現象を小さく抑えることが可能であることを確認した。

２ 準 備

本章では，線形補間とシフト線形補間について概略を述べる。

ある関数 $f(x)$ を標本化間隔 T で離散化して得られるサンプル値列を $f[n]=f(nT)$ とする。線形補間では，補間により得られる連続関数 $f_T(x)$ は

$$f_T(x)=\sum_{n\in z} f[n]\,\varphi\left(\frac{x}{T}-n\right)$$

と表され，単純にサンプル値列を直線で結んで得られる関数に等しくなる。このとき，基底関数 φ は以下のようになる。

$$\varphi(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

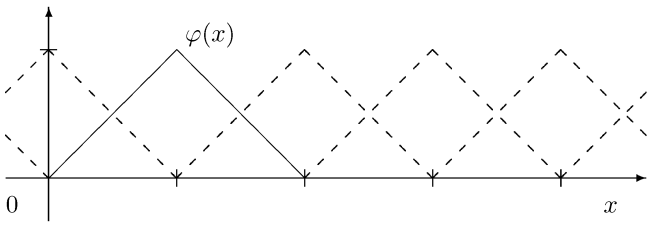
シフト線形補間[3]により補間される関数は以下のように表される。

$$f_T(x)=\sum_{n\in z} c[n]\,\varphi\left(\frac{x}{T}-n-\tau\right)$$

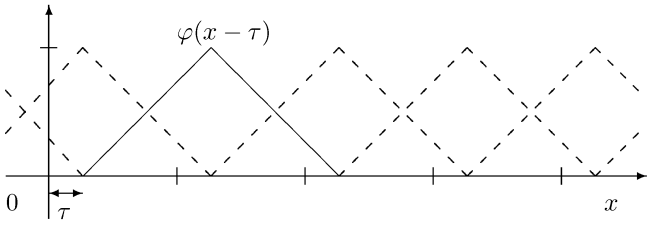
ただし，τ はシフトパラメータである。係数列 $\{c[n]\}_{n\in z}$ は再帰的に以下のようにして導出される。

$$c[n]=-\frac{\tau}{1-\tau}\,c[n-1]+\frac{1}{1-\tau}\,f[n]$$

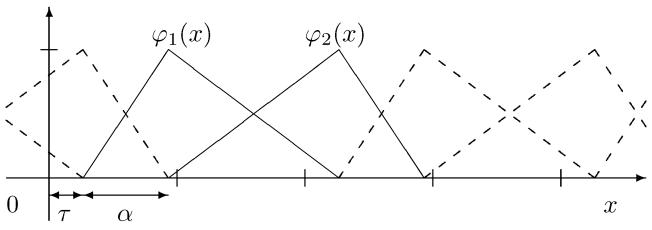
この式で表される手順を実現するには，IIR フィルタが必要となる。また，τ の最適値は約 0.21 であることが数学的に示されている[3]．これらの基底関数を図１(a)，(b)に示す。



(a) 線形補間



(b) シフト線形補間



(c) 提案手法

図１：基底関数

３ 一般化区分的線形補間法

本章では，異なる２つの基底関数を導入することで，シフト線形補間の考え方をさらに拡張し，一般化区分的線形補間法を確立する。ここで，図１(c)に示される２つの非対称な関数基底 φ_1 と φ_2 を用意する。これら２つの関数は互いに鏡像の関係にあり，以下のように表される。

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\tau}{\alpha}, & \tau\le x<\tau+\alpha\\ \dfrac{2+\tau-x}{2-\alpha}, & \tau+\alpha\le x<\tau+2\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\tau-\alpha}{2-\alpha}, & \tau+\alpha\le x<\tau+2\\ \dfrac{\tau+\alpha+2-x}{\alpha}, & \tau+2\le x<\tau+\alpha+2\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

これらの関数は以下の要領で連続関数を再構成する。

$$f[n]=\sum_{k\in z}c_1[k]\varphi_1[n-2k]+\sum_{k\in z}c_2[k]\varphi_2[n-2k].$$

パラメータ τ と α は，それぞれシフトと対称性を表す。任意の $x\in\boldsymbol{R}$ に対して，これらの基底関数は “partition of unity” と呼ばれる性質を満足する。この性質は以下のように書ける。

$$\sum_{n\in z}\{\varphi_1(x-2n)+\varphi_2(x-2n)\}=1.$$

$\tau+\alpha<1$の場合は，係数列 c_1 と c_2 は以下の式により求められる。

$$c_1[n]=(2-\tau-\alpha)f[2n+1]-(1-\tau-\alpha)f[2n+2],$$

$$c_2[n]=(1+\alpha)f[2n+2]-\alpha f[2n+1]$$

これらの手順は FIR フィルタでの実現が可能である。信号分解・再構成全体の手順はフィルタバンクの形として図２のように描ける。分解のためのフィルタ $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1$ および $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_2$ は以下のように表される。

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1(z)=(2-\tau-\alpha)z-(1-\tau-\alpha)z^2,$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_2(z)=(1+\alpha)z^2-\alpha z$$

他方，再構成フィルタ $\boldsymbol{\Phi}_1$ および $\boldsymbol{\Phi}_2$ は以下の通りである。

$$\boldsymbol{\Phi}_1(z)=\frac{\alpha+(1+\alpha)z^{-1}}{2-\tau},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2(z)=\frac{(2-\tau-\alpha)+(1-\tau-\alpha)z^{-1}}{2-\tau}$$

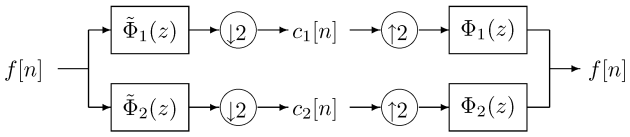


図２：提案手法のフィルタバンクによる構成

$\tau+\alpha \geq 1$ の場合は，分解回路 $\tilde{\Phi}_1$ および $\tilde{\Phi}_2$ は以下のようになる。

$$\tilde{\Phi}_1(z) = \frac{\tau(2-\tau-\alpha)z + (2-\tau)(1-\tau-\alpha)}{(1-\alpha)(2-\tau-\alpha) + \alpha(1-\tau-\alpha)z^{-2}},$$

$$\tilde{\Phi}_2(z) = \frac{(2-\tau)(1-\alpha)z^2 - \tau\alpha z}{(1-\alpha)(2-\tau-\alpha) + \alpha(1-\tau-\alpha)z^{-2}}$$

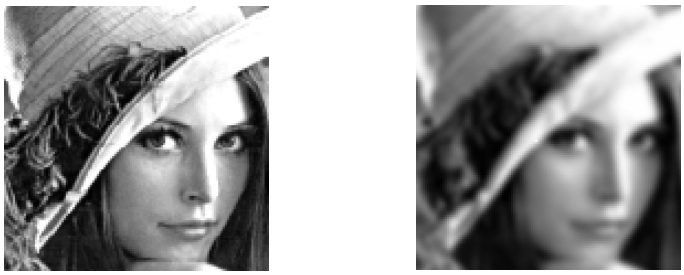
これらのフィルタは Forward/Backward IIR フィルタにより安定に実現される。

４ シミュレーション

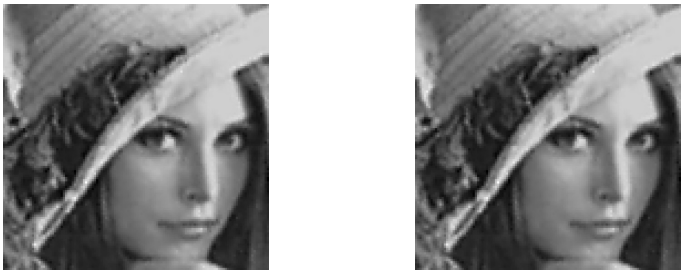
本章では，信号処理，画像処理におけるシミュレーションを通して，提案手法の有効性を評価する。

まず，文献[3]と同様に，ディジタル画像を24度ずつ15回回転させた結果を原画像と比較して評価する。対象とする画像は図３(a)，図４(a)及び図５(a)に示す３つであり，それぞれ異なったせ異質を持つ。“Lena”は主として低周波成分から構成されており，“Baboon”はあらゆる周波数帯の成分を含んでいる。“Particles”は本来２値画像であり，高周波成分を多く含む画像の例として考えられる。

提案手法を評価するために，パラメータ τ と α について，様々な値の組み合わせをこれら３つの画像に適用して評価した。図６は，パラメータ τ と α を変化させた場合の，ピーク SN 比の振る舞いを示している。図６より，シフト線形補間の場合 ($\tau = 0.21, \alpha = 0$) に最も良いピーク SN 比が得られていることがわかる。実際，再構成された画像は，図３(c)，図４(c)及び図５(c)に示されるようにシフト線形補間の場合が最も精度が高く，図３

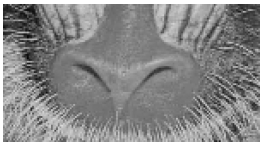


(a) Original　　(b) Linear



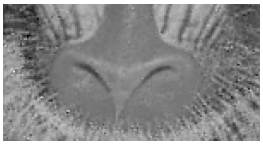
(c) Shifted-Linear　　(d) τ=0.21, α=0.58

図３：画像“Lena”：原画像と回転画像

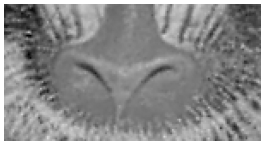


(a) Original

(b) Linear



(c) Shifted-Linear

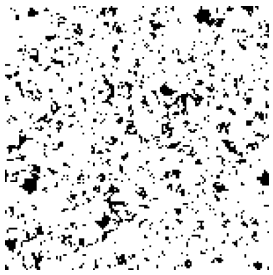


(d) τ=0.21, α=0.58

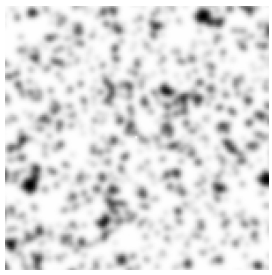
図４：画像“Baboon”：原画像と回転画像

表１：原画像・回転画像の最大値と最小値の比較

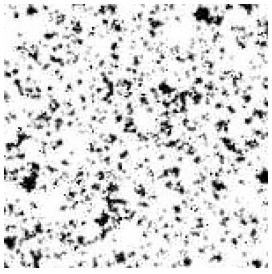
	Lena	Baboon	Particles
	Min/Max	Min/Max	Min/Max
原画像	0/255	6/227	0/255
線形補間	0/255	6/227	0/255
シフト線形補間	−105/369	−31/384	−420/1015
提案手法 ($\tau = 0.21, \alpha = 0.58$)	−50/343	−5/245	−200/410



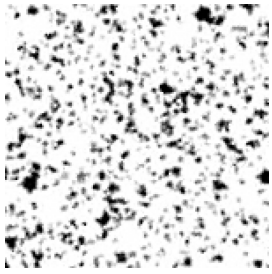
(a) 原画像



(b) 線形補間

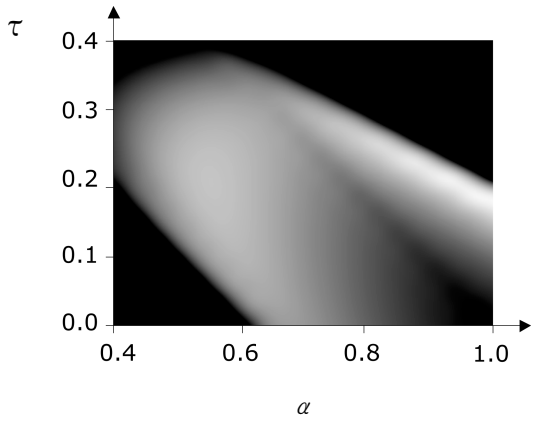


(c) シフト線形補間

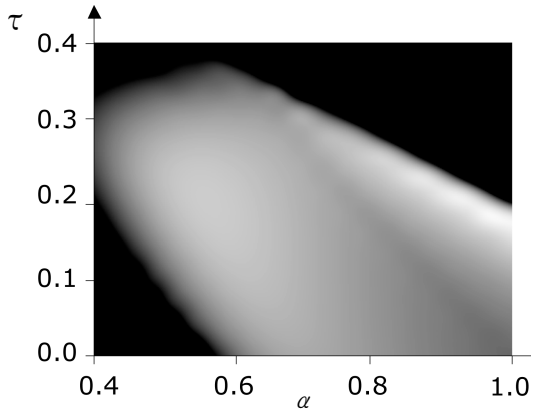


(d) τ=0.21, α=0.58

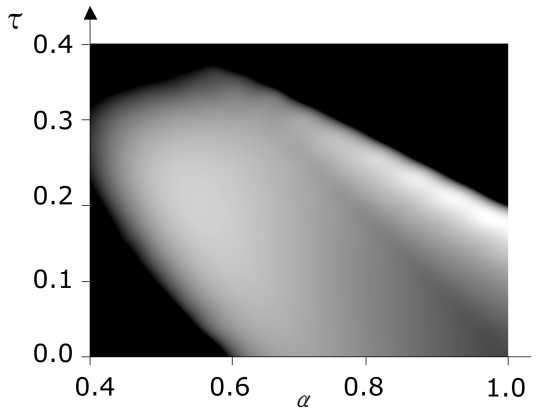
図５：画像“Particles”：原画像と回転画像



(a) Lena; white= 28dB, black= 22dB or less
線形補間: 22.0dB, シフト線形補間: 28.1dB, 提案手法: 27.6dB



(b) Baboon; white= 18.5dB, black= 15dB or less
線形補間: 16.2dB, シフト線形補間: 18.6dB, 提案手法: 18.0dB



(c) Particles; white= 13.5dB, black= 10dB or less
線形補間: 10.6dB, シフト線形補間: 13.3dB, 提案手法: 12.8dB

図６：各種ディジタル画像における原画像と回転画像のピーク SN比の比較： パラメータ α と τ を変化させた場合

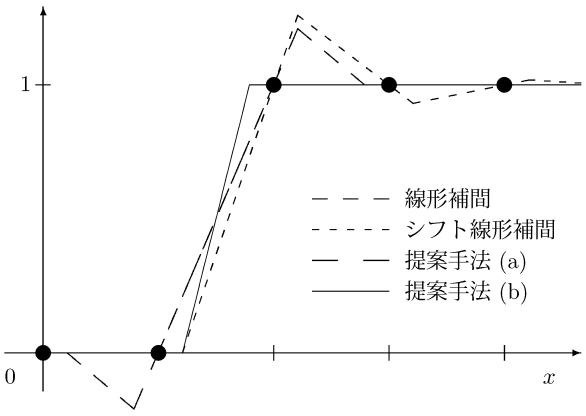


図７：単位ステップ関数の補間例

(b), 図４(b)及び図５(b)に示されているような線形補間の場合と比べるとはるかに高精度であることが確認できる。

図６を見ると，パラメータを $\tau = 0.21$, $\alpha = 0.58$ と設定した場合にも，ピーク SN 比が極大となっていることがわかる。ここでのピーク SN 比はシフト線形補間の場合よりも若干小さくなっているが，図３(c)，図４(c)及び図５(c) と 図３(d)，図４(d)及び図５(d)からもわかるとおり，再構成された画像はほぼ同程度の精度となっていることがわかる。シフト線形補間では，再構成された画像の最大値・最小値はきわめて大きくなり，画素値の範囲が大きくなってしまっていたが，パラメータを $\tau = 0.21$, $\alpha = 0.58$ と設定した場合には，より原画像の画素値の範囲に近くなっていることが表１からも確認できる。特に，図４(c)などに見られるように，シフト線形補間ではインパルス状の黒または白の斑点状の画素が存在している。こうした画素の値は原画像の画素値からかけ離れており，表１のような値となる原因となっている。

シフト線形補間における画素値の存在範囲の大きさは，ステップ関数状の離散点を補間する際に，ギブス現象のような発振が繰り返された結果として考えることができる。図７は，ユニットステップ関数のサンプル値を補間した結果を示している。シフト線形補間は数ステップにわたり発振していることが確認できる。パラメータ $\tau = 0.21$, $\alpha = 0.58$ の場合には，２つの異なる基底関数を用いていることから，２つの異なる振る舞い(a), (b)が考えられる。(a)の場合はシフト線形補間よりも発振の幅が小さく，また，(b)の場合には全く発振していない。こうした結果が，表１にあるように，画素値の存在範囲を小さくしている。

提案手法における計算時間は，図２における係数 c_1 および c_2 を求める手順を並列に実行できるという条件の下では，シフト線形補間とほぼ同程度である。

５ まとめ

本稿では，一般化区分的線形補間法を提案し，その信号処理・画像処理における有効性について検証した。提案した非対称な基底関数は，区分的線形補間基底関数を一般化したものと捉えることができる。まず，こうした関数基底によって信号や画像を分解・再構成する手法を，フィルタバンクの形で実現した。さらに，ディジタル画像の回転を通して，提案した基底関数の有効性を評価した。

提案した関数基底とそのパラメータ τ, α の組み合わせについては，数学的にさらに検討する必要がある。また，３つ以上の異なる関数基底を用いた場合についても今後検討する予定である。

参考文献

[1] P. Thévenaz, T. Blu and M. Unser, “Image Interpolation and Resampling,” in *Handbook of Medical Imaging, Processing and Analysis*,I.N. Bankman Ed., pp.393-420. Academic Press, San Diego, CA,U.S.A, 2000.

[2] P. Thévenaz, T. Blu and M. Unser, “Interpolation Revisited,” *IEEE Trans. Med. Imag*,vol. 19, no. 7, pp.739-758, July 2000.

[3] T. Blu, P. Thévenaz and M. Unser, “How A Simple Shift Can Significantly Improve The Performance

of Linear Interpolation," *Proc. IEEE Int'l Conf. on Image Proc,* pp. III.377-III.380, Rochester, NY, U.S.A, Sep. 2002.

[4] G. Strang, T. Nguyen, Wavelet and Filter Banks, Wellesley Cambridge Pr., MA, USA, 1996.

〈発 表 資 料〉

題　　名	掲 載 誌 ・ 学 会 名 等	発 表 年 月
Interpolation of signals by generalized piecewise-linear multiple gonerators	Proceedings of 28th IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. 6, pp.261-264.	2003年4月
Multiwavelet-like bases for high quality image interpolation	Proceedings of 48th SPIE International Symposium on Optical Science and Technolgy; Wavelets X, no.5207-21.	2003年8月
Generalized piecewise-linear interpolation: Basic Theory	電子情報通信学会総合大会, A-4-20	2003年3月