Vers une théorie unificatrice pour le traitement numérique/analogique des signaux

Michael UNSER

Laboratoire d'imagerie biomédicale
École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)
CH-1015, Lausanne, Suisse
Michael.Unser@epfl.ch

Résumé – Nous proposons un cadre Hilbertien, inspiré de la théorie des ondelettes, permettant de relier de façon exacte les formulations traditionnelles—numérique et analogique—pour le traitement des signaux. Contrairement à la théorie d'échantillonnage de Shannon, notre approche utilise des fonctions de base à support borné, ce qui la rend plus intéressante pour le cacul numérique. Le modèle continu sous-jacent est de type "spline exponentiel" (avec fonction de transfert rationnelle) qui présente l'avantage d'être fermé par rapport aux opérations de base du traitement du signal: système différentiel, convolution et modulation en temps continu. L'intérêt principal de la méthode est qu'elle permet un calcul exact de type continu par application d'un opérateur correspondant dans le domaine discret, pour autant que l'on adapte les fonctions de base de façon adéquate. Le formalisme est particulièrement adapté au traitement hybride des signaux car il permet une prise en compte conjointe de tous les éléments numériques et analogiques du système. Nous illustrerons cet aspect avec des exemples concrets de systèmes hybrides pour une conversion A/N ou N/A améliorée. De façon plus fondamentale, le cadre proposé explique la ressemblance frappante qui existe entre les opérateurs élémentaires numériques et analogiques en théorie du signal.

Abstract – We introduce a Hilbert-space framework, inspired by wavelet theory, that provides an exact link between the traditional—discrete and analog—formulations of signal processing. In contrast to Shannon's sampling theory, our approach uses basis functions that are compactly supported and therefore better suited for numerical computations. The underlying continuous-time signal model is of exponential spline type (with rational transfer function); this family of functions has the advantage of being closed under the basic signal-processing operations: differentiation, continuous-time convolution, and modulation. A key point of the method is that it allows an exact implementation of continuous-time operators by simple processing in the discrete domain, provided that one updates the basis functions appropriately. The framework is ideally suited for hybrid signal processing because it can jointly represent the effect of the various (analog or digital) components of the system. This point will be illustrated with the design of hybrid systems for improved A-to-D and D-to-A conversion. On the more fundamental front, the proposed formulation sheds new light on the striking parallel that exists between the basic analog and discrete operators in the classical theory of linear systems.

References

[1] I.J. Schoenberg, *Cardinal spline interpolation*, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1973.

[2] L.L. Schumaker, *Spline functions: Basic theory*, Wiley, New York, 1981.

[3] M. Unser, "Splines: A perfect fit for signal and image processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no. 6, pp. 22–38, 1999.

[4] M. Unser and T. Blu, "Cardinal exponential splines: Part I—Theory and filtering algorithms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 4, pp. 1425-1438, April 2005.

[5] M. Unser, "Cardinal exponential splines: Part II—Think analog, act digital," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, no. 4, pp. 1439–1449, April 2005.

[6] M. Unser and T. Blu, "Generalized smoothing splines and the optimal discretization of the Wiener filter," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, no. 6, pp. 2146–2159, June 2005.