Signal Processing 30 (1993) 141–162
Elsevier

A family of polynomial spline wavelet transforms

Michael Unser, Akram Aldroubi and Murray Eden

Biomedical Engineering and Instrumentation Program, National Center for Research Resources, National Institutes of Health, Bethesda, MD 20892, USA

Received 25 July 1991
Revised 24 January 1992 and 25 May 1992

Abstract. This paper presents an extension of the family of orthogonal Battle/Lemarié spline wavelet transforms with emphasis on filter bank implementation. Spline wavelets that are not necessarily orthogonal within the same resoluton level, are constructed by linear combination of polynomial spline wavelets of compact support, the natural counterpart of classical *B*-spline functions. Mallat's fast wavelet transform algorithm is extended to deal with these non-orthogonal basis functions. The impulse and frequency responses of the corresponding analysis and synthesis filters are derived explicitly for polynomial splines of any order n (n odd). The link with the general framework of biorthogonal wavelet transforms is also made explicit. The special cases of orthogonal, *B*-spline, cardinal and dual wavelets are considered in greater detail. The *B*-spline (respectively dual) representation is associated with simple FIR binomial synthesis (respectively analysis) filters and recursive analysis (respectively synthesis) filters. The cardinal representation provides a sampled representation of the underlying continuous functions (interpolation property). The distinction between cardinal and orthogonal representation vanishes as the order of the spline is increased; both wavelets tend asymptotically to the bandlimited sinc-wavelet. The distinctive features of these various representations are discussed and illustrated with a texture analysis example.

Zusammenfassung. Dieser Artikel stellt eine Verallgemeinerung der Familie der orthogonalen Spline-Wavelet-Transformationen nach Battle/Lemarié vor, wobei insbesondere auf die Filterbank-Implementierung eingegangen wird. Durch Linearkombination von Polynom-Spline-Wavelets mit kompaktem Träger – dem natürlichen Gegenstück zu klassischen *B*-Spline-Funktionen – werden Spline-Wavelets konstruiert, die nicht notwendigerweise orthogonal innerhalb eines Auflösungsniveaus sind. Der schnelle Wavelet-Transformations-Algorithmus von Mallat wird auf diese nichtorthogonalen Basisfunktionen erweitert. Die Impulsant worten und Übertragungsfunktionen der zugeordneten Analyse- und Synthesefilter werden für Polynom-Splines beliebiger (ungerader) Ordnung explizit hergeleitet. Die Verbindung zum allgemeinen Konzept der biorthogonalen Wavelet-Transformationen wird ebenfalls klar herausgearbeitet. Die Spezialfälle der orthogonalen, *B*-Spline-, kardinalen und dualen Wavelets werden im Detail betrachtet. Die *B*-Spline- (bzw. duale) Darstellung ist mit einfachen nichtrekursiven binomialen Synthesefiltern (bzw. Analysefiltern) sowie rekursiven Analysefiltern (bzw. Synthesefiltern) verbunden. Die kardinale Darstellung ergibt eine abgetastete Darstellung der zugrundeliegenden kontinuierlichen Funktion (interpolationseigenschaft). Bei zunehmender Ordnung des Splines verschwindet der Unterschied zwischen der kardinalen und der orthogonalen Darstellung; beide Wavelets nähern sich dem bandbegrenzten sinc-Wavelet an. Die charakteristischen Merkmale dieser verschiedenen Darstellungen werden diskutiert und durch ein Texturanalyse-Beispiel illustriert.

Résumé. Ce papier présente une extension de la famille orthogonale d'ondelettes spline de Battle et Lemarié en mettant l'accent sur une mise en oeuvre par banc de filtres. Des ondelettes spline – pas forcément orthogonales à l'intérieur d'un même niveau de resolution – sont construites par convolution discrète d'ondelettes spline polynomiales à support compact; ces dernières étant l'extension naturelle des fonctions *B*-spline classiques. L'algorithme de décomposition et reconstruction par filtrage QMF de Mallat est modifié pour ces fonctions de bases non-orthogonales. Les réponses impulsionelles et fréquentielles des filtres

Correspondence to: Dr. Michael Unser, BEIP/NCRR, Building 13, Room 3W13, National Institutes of Health, Bethesda, Maryland 20892, USA. Tel: (301) 496-4426; Fax: (301) 496-6608; E-Mail: unser@helix.nih.gov.

Elsevier Science Publishers B.V.